Maksvelove jednačine:

1. Faradajev zakon: **diferencijalni oblik:** $rot\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, **integralni oblik:** $\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S}$
2. Amperov zakon: **diferencijalni oblik:** $rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$, **integralni oblik:** $\oint \vec{H} \overrightarrow{dl} = \int \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) d\vec{S}$
3. Gausov zakon: **difrencijalni oblik:** $div\vec{D} = \rho_{sl}$, **integralni oblik:** $\oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho_{sl} dV$
4. Konzervacija fluksa: **diferecijalni oblik:** $div\vec{B} = 0$, **integralni oblik:** $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$

Talasna jednačina progresivnog talasa po električnom polju za homogene, linearne, izotropne sredine:
izvodi se primenjivajem operatora ***rot*** na prvu Maxwell-ovu jednačinu. Analogna jednačina važi i za magnetno polje i dobije se primenjivanjem operatora ***rot*** na drugu Maxwell-ovu jednačinu.

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Talasna jednačina za nehomogene, linearne i izotropne sredine:
dobija se istim postupkom kao i prethodna, sa razlikom da je sada ε funkcija koordinata, pa važi:

$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - grad\left(\frac{grad\varepsilon}{\varepsilon} \vec{E}\right)$, uopsteno: $\nabla^2 \psi - \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

Rešenje jednačine za homogenu sredinu:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{-j\frac{\omega}{c} n(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)} e^{j\omega t}$$

što je i oblik rešenja jednačine za nehomogenu sredinu, sa dodatkom da je tada indeks prelamanja funkcija koordinata.

Jednacina Ajkonala:
Uvođenjem novih oznaka: $\beta_0 = \omega/c$, $A(x, y, z) = \psi_0$, $n(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = S(x, y, z)$ i ubacivanjem u uopštenu talasnu jednačinu i primenom geometrijske aproksimacije $\beta \to \infty$ dobija se jednačina Ajkonala: $(gradS)^2 = n^2$.

Grupni indeks prelamanja: $N = c\frac{d}{d\omega}\left(\frac{n\omega}{c}\right) \Rightarrow N = n + \omega\frac{dn}{d\omega} = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}$
Veza između grupne i fazne brzine: $v_{gr} = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$
Frenelovi koeficijenti:

$$r^{TE} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \gtrless 0 \qquad t^{TE} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} > 0$$

Ukoliko je $r^{TE} < 0$ reflektovani talas ima fazu pomerenu za π.

$$r^{TM} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} = \frac{2\sin(\theta_i - \theta_t)\cos(\theta_i + \theta_t)}{2\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t^{TM} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

<u>Brusterov ugao:</u> $\theta_B = \tan^{-1}\frac{n_2}{n_1}$.

<u>Kompleksni Frenelovi koeficijenti:</u>

$r^{TE} = \frac{A-jB}{A+jB} = |r^{TE}|e^{2j\phi^{TE}}$, $|r^{TE}| = \sqrt{A^2+B^2}$, $\phi^{TE} = \tan^{-1}\frac{B}{A} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{n_1^2(\sin\theta_i)^2 - n_2^2}}{n_1\cos\theta_i}$

<u>Dubina prodiranja evanescentonog talasa:</u> $\delta = \frac{1}{k_2 B}$, $B = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1}$

<u>Planarni dielektrični talasovod:</u>

U kompleksnom domenu električno polje EM talasa u planarnom talasovodu se može opisati sledećom formom:

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z,t) = \vec{\boldsymbol{E}}(x,y)e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial t} \equiv j\omega, \frac{\partial}{\partial z} \equiv -j\beta$$

Iz prve i druge Maskvelove jednačine dobijaju se setovi jednačina za TE i TM polarizaciju:

<u>TE:</u>

$$j\beta E_y = -j\mu\omega H_x$$
$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\varepsilon\omega E_y$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\mu\omega H_z$$
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (\mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2)E_y = 0$$

<u>TM:</u>

$$j\beta H_y = j\varepsilon\omega E_x$$
$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\mu\omega H_y$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = j\varepsilon\omega E_z$$
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (\mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2)E_z = 0$$

<u>Omotač:</u>

$$(\mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2) = (k_2^2 - \beta^2) = -k_{2x}^2$$

<u>Jezgro:</u>

$$(\mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2) = (k_1^2 - \beta^2) = k_{1x}^2$$
$$k_2 < \beta < k_1$$

Nakon postavljanja graničnih uslova, zarad rešavanja talasnih jednačina po E_y i E_z polju potrebno je pronaći veze izmedju komponenti H_z i E_y i između H_y i E_z.

<u>Stuktura polja i disperziona relacija:</u>

$$E_z = \begin{cases} A_1 e^{-k_{2x}x}, & x > d/2 \\ Ae^{jk_{1x}x} + Be^{-jk_{1x}x}, & |x| \le d/2 \\ A_2 e^{k_{2x}x}, & x < -d/2 \end{cases} \qquad E_y = \begin{cases} A_1 e^{-k_{2x}x}, & x > d/2 \\ Ae^{jk_{1x}x} + Be^{-jk_{1x}x}, & |x| \le d/2 \\ A_2 e^{k_{2x}x}, & x < -d/2 \end{cases}$$

$$W^{TM} = \begin{cases} -\frac{n_2^2}{n_1^2} U \cot\frac{U}{2}, m = 1,3,5,\dots \\ \frac{n_2^2}{n_1^2} U \tan\frac{U}{2}, m = 0,2,4,\dots \end{cases} \qquad W^{TM} = \begin{cases} -U \cot\frac{U}{2}, m = 1,3,5,\dots \\ U \tan\frac{U}{2}, m = 0,2,4,\dots \end{cases}$$

$$U = k_{1x} d, W = k_{2x} d$$

$$R^2 = U^2 + W^2 = d^2 k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \Rightarrow R = d k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = d k_0 \mathcal{NA}$$

<u>Optička vlakna:</u>

U kompleksnom domenu električno polje EM talasa u optickom vlaknu se može opisati sledećom formom:

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r,\varphi,z,t) = \vec{\boldsymbol{E}}(r,\varphi) e^{j(\omega t - \beta z)}$$

Iz prve i druge Maksvelove jednačine, uz usvajanje cilindričnog koordinatnog sistema u kome je:

$$rot\vec{E} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - r\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\vec{\imath}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\vec{\imath}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(E_\varphi r) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right)\vec{\imath}_z$$

dobijaju se setovi jednačina:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j\beta r E_\varphi\right) = -j\mu\omega H_r \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + j\beta r H_\varphi\right) = j\varepsilon\omega E_r$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} + j\beta E_r = j\mu\omega H_\varphi \qquad \frac{\partial H_z}{\partial r} + j\beta H_r = -j\varepsilon\omega E_\varphi$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(E_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right) = -j\mu\omega H_z \qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(H_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}\right) = j\varepsilon\omega E_z$$

Sada je potrebno izraziti E_r, E_φ, H_r i H_φ preko E_z i H_z korišćenjem prve dve jednačine leve kolone i prve dve jednačine desne kolone, a onda dobijene relacije smeniti u treću jednačinu leve kolone i treću jednačinu desne kolone čime se dobijaju talasne jednačine po električnom (i magnetskom polju H_z):

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + (\mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2)E_z = 0$$

Razdvajanjem promenljivih dolazi se do seta jednačina:

$$\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F(r)}{\partial r} + \left(\mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)F(r) = 0$$

$$-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \nu^2$$

<u>Beselova diferencijalna jednačina:</u>

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

<u>Struktura polja:</u>

$$E_{z1} = A J_\nu(ur) e^{j\nu\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad E_{z2} = C K_\nu(wr) e^{j\nu\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

Disperziona relacija:

$$(j_u + k_w)(n_1^2 j_u + n_2^2 k_w) = \nu^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2}\right)\left(\frac{n_1^2}{U^2} + \frac{n_2^2}{W^2}\right)$$

$$j_u = \frac{J'_\nu(U)}{UJ_\nu(U)} \qquad k_w = \frac{K'_\nu(W)}{WK_\nu(W)} \qquad \begin{matrix} U = au \\ W = aw \end{matrix}$$

$$U^2 + W^2 = V^2 = (k_1^2 - k_2^2)a^2$$

Azimutalni modovi: $\nu = 0$.

***TE*$_{0m}$ i *TM*$_{0m}$ modovi:**

$$\frac{J'_0(U)}{UJ_0(U)} = -\frac{K'_0(W)}{WK_0(W)}$$

Hibridni modovi: $\nu \neq 0$.

$$j_u + k_w = \pm\nu\left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2}\right)$$

"+" – EH_{vm} modovi, "-" – HE_{vm} modovi

Zajednička disperziona relacija:

$$U\frac{J_{p-1}(U)}{J_p(U)} = -W\frac{K_{p-1}(W)}{K_p(W)} \qquad p = \begin{cases} 1, TE_{om}, TM_{om} \\ \nu + 1, EH_{\nu m} \\ \nu - 1, HE_{\nu m} \end{cases}$$

$LP_{01} = HE_{11}$ – fundamentalni mod, nema cutt-off frekvenciju, omogućava rad u monomodnom režimu.

Normalizovana fazna konstanta *b*:

$$b = 1 - \frac{U^2}{V^2}$$

Podužno grupno kašnjenje:

$$t_g = \frac{N_2}{c}\left(1 + \Delta\frac{d(bV)}{dV}\right)$$

Disperzija vlakna:

$$d = \frac{dt_g}{d\lambda} = \frac{1}{c}\frac{dN_2}{d\lambda} - \frac{N_2\Delta V}{c\lambda}\frac{d^2(bV)}{dV^2}$$

Trigonometrijske transformacije:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

Rekuretne relacije za Beselove funkcije:

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}J_\nu(z), \qquad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J_\nu'(z), \qquad K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z}K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K_\nu'(z)$$