Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

19. januar, 2021. godine

# **Ispit** iz predmeta **Statistička fizika**

(ispit traje 180 minuta)

*Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati, označiti u odgovarajućoj kućici na koricama sveske oznakom X. Zadatak obavezno započeti na novoj stranici. Neuredno i nečitko napisani zadaci neće biti pregledani. Odgovori se priznaju samo ukoliko su detaljno obrazloženi i ukoliko je konačan odgovor napisan korišćenjem pune rečenice, bez proizvoljno uvedenih oznaka kao što su strelice i slični simboli. Konačan odgovor uokviriti. Prilikom pregleda zadataka biće ocenjena tačnost i netačnost svega što je napisano u vežbanci, osim nedvosmisleno precrtanih oblasti.*

*Nije dozvoljen izlazak iz sale u prvih 60 minuta.*

*Ispitni deo gradiva sastoji se od zadataka 1–5. Dopunskim zadatkom 6, studenti mogu nadoknaditi do 10 poena predispitnih obaveza.*

1. [10] Posmatra se jedan kvantni sistem u termostatu koji se sastoji od $N$ identičnih čestica u stanju termodinamičke ravnoteže na konačnoj temperaturi $T$.

   (a) Analizom u $n$-prostoru, izvesti izraze za unutrašnju energiju sistema $U$ [3] i standardno odstupanje unutrašnje energije sistema $\sigma_U$ [4] u funkciji statističke sume sistema $Z$;

   (b) Ako u sistemu postoje dva diskretna energijska nivoa: $E_1 = 0$ i $E_2 = \varepsilon$, odrediti relativnu fluktuaciju sistema $\delta = \sigma_U/U$ [3].

2. [15] Za idealni fotonski gas, polazeći od Plankove raspodele odrediti:

   (a) Vezu između pritiska $p$ i ukupne gustine zračenja $W$ [10];

   (b) Zavisnost ukupne gustine zračenja od temperature $W(T)$ [5]. Rezultat izraziti preko Rimanove zeta funkcije.

3. [10] Izvesti izraz za gustinu kvantnih stanja $\rho(E)$ elektrona u metalu [5], a zatim izvesti izraz za srednju vrednost energije jednog elektrona $\langle E \rangle$ na temperaturi apsolutne nule u funkciji $E_{\mathrm{F0}}$ [5]. Smatrati da je dno provodne zone izabrano za referentni nivo energiju elektrona ($E_{\mathrm{c}} = 0$ eV) u provodnoj zoni.

4. [10] Izvesti i obrazložiti uslove normiranja za dvočestičnu i haočestičnu korelacionu funkciju $g_2(1,2)$ i $g_3(1,2,3)$, respektivno.

5. [15]

   (a) Napisati opšti izraz za integral sudara izveden iz Bolcmanove forme i objasniti veličine koje ga određuju [3].

   (b) Polazeći od forme integrala sudara iz tačke (a), napisati opšti izraz za integral sudara pomoću verovatnoća prelaza i objasniti veličine koje ga određuju [4].

   (c) Polazeći od forme integrala sudara iz tačke (b), pod pretpostavkom da su verovatnoće prelaza konstantne i da je ispunjen princip detaljnog balansa, uz detaljno objašnjenje izvesti izraz za vreme relaksacije sistema za slučaj interakcije elektronskog i fononskog gasa [4].

   (d) Polazeći od izraza za vreme relaksacije pod (c) izvesti i diskutovati zavisnost vremena relaksacije od temperature [4].

*Napomene:*

$$\textit{Debajev integral: } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \mathrm{d}x}{\exp(x) - 1} = \Gamma(n+1)\xi(n+1),$$

*gde je sa $\xi$ označena Rimanova zeta funkcija, a sa $\Gamma$ gama funkcija. Za $n \in N$, $\Gamma(n+1) = n!$*

**Dopunski zadatak nalazi se na poleđini lista.**

**Dopunski zadatak:**

6. [10]

   1. Za slučaj trodimenzionalne elektroneutralne sferno-simetrične plazme za koju je ispunjen uslov male perturbacije, izvesti izraz za raspodelu električnog potencijala van oblasti praznog prostora oko čestice ($r \geq r_{\text{ob}}$) [3];
   2. Objasniti pojam male perturbacije, a zatim ovaj uslov matematički izraziti preko poluprečnika Debaja [3];
   3. Izvesti izraz za korekciju unutrašnje energije plazme u funkciji makroskopskih parametara, koja potiče od elektrostatičke interakcije između čestica [4].

.

# Rešenja

1. (a) Ako je sa $Z$ označena staistička suma sistema od $N$ čestica ($Z = Z_1^N$, gde je $Z_1$ statistička suma jedne čestice), traženi izrazi imaju formu:

$$U = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \qquad \sigma_U = \sqrt{-\frac{\partial U}{\partial \beta}},$$

   gde je $\beta = 1/(kT)$.

   (b) Tražena relativna fluktuacija sistema iznosi:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{(1/2)\beta\varepsilon}.$$

2. (a) Tražena veza je $p = (1/3)W$.

   (b) Tražena zavisnost ukupne gustine zračenja od temperature je:

$$W = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 6\xi(4).$$

3. Tražena gustina kvantnih stanja iznosi:

$$\rho(E) = \frac{8\pi}{h^3} m_c \sqrt{2m_c E},$$

   gde je sa $m_c$ označena masa elektrona u provodnoj zoni. Srednja vrednost energije jednog elektrona iznosi $\langle E \rangle = (3/5)E_{F0}$.

4. Videti poglavlje 1.3 sa strane 109 iz knjige Jovan Radunović: *Statistička fizika sa kinetičkom teorijom u fizičkoj elektronici.*

5. Videti poglavlje 2.9 sa strane 132 iz knjige Jovan Radunović: *Statistička fizika sa kinetičkom teorijom u fizičkoj elektronici.*

6. Videti poglavlje 3.4 sa strane 60 i poglavlje 3.4.1 sa strane 65 iz knjige Jovan Radunović: *Statistička fizika sa kinetičkom teorijom u fizičkoj elektronici.*