Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu
28. novembar, 2020. godine

Kolokvijum iz predmeta **Statistička fizika**

(kolokvijum traje 120 minuta)

Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati, označiti u odgovarajućoj kućici na koricama sveske oznakom X. Zadatak obavezno započeti na novoj stranici. Neuredno i nečitko napisani zadaci neće biti pregledani. Odgovori se priznaju samo ukoliko su detaljno obrazloženi i ukoliko je konačan odgovor napisan korišćenjem pune rečenice, bez proizvoljno uvedenih oznaka kao što su strelice i slični simboli. Konačan odgovor uokviriti. Prilikom pregleda zadataka biće ocenjena tačnost i netačnost svega što je napisano u vežbanci, osim nedvosmisleno precrtanih oblasti. Nije dozvoljen izlazak iz sale u prvih 60 minuta.

1. [20] Za idealan gas u termodinamičkoj ravnoteži:

   (a) Polazeći od Maksvelove raspodele po impulsima čestica, izvesti raspodelu po intenzitetima brzina [4] i energijama [2], a zatim odrediti najverovatniju brzinu v_{mp} [1], efektivnu brzinu v_{eff} [2] i najverovatniju energiju E_{mp} [1]. Obrazložiti zbog čega najverovatnija energija ne odgovara najverovatnijoj brzini [2];

   (b) Izračunati procenat čestica idealnog gasa koje imaju intenzitet brzine veći od $2v_{\text{mp}}$ [4]. Rezultat izraziti preko funkcije greške;

   (c) Izračunati procenat ukupnog pritiska gasa koji potiče od sudara čestica iz prethodne tačke sa zidovima suda [4]. Rezultat izraziti preko funkcije greške.

2. [10] Idealan gas u termostatu na temperaturi T, koji se sastoji od N identičnih čestica, nalazi se u cilindričnoj posudi poluprečnika R i visine L u kojoj je gas izložen polju sa potencijalnom energijom:

$$E_{\text{p}}(r) = \begin{cases} Cr & 0 \le r \le R \\ +\infty & R < r < +\infty \end{cases}$$

   gde je C pozitivna konstanta, a r radijalna koordinata. Sistem se nalazi van uticaja gravitacionog polja. Odrediti statističku sumu ovog gasa Z [6], Helmholcovu slobodnu energiju F [2] i entropiju S [2].

3. [10] Posmatra se beskonačno dugačak sistem potpuno jonizovane i globalno elektroneutralne plazme koji je određen poprečnim presekom S i podužnom gustinom čestica n_{b0} za dati tip naelektrisanja (e_b, $b = e, j$) koja odgovara slučaju kada polje ne deluje na čestice. Izvesti izraz za podužnu gustinu čestica $n_b(x)$ u okolini naelektrisanja e_a za koje se može pretpostaviti da na naelektrisanja u oblaku deluje kao površinsko naelektrisanje gustine e_a/S. Osim e_a i S, smatrati poznatim prostor x_{ob} u kome se u okolini čestice ne nalaze druge čestice, temperaturu plazme T i njenu dielektričnu konstantu ε.

Napomene:

Za integral u formi:

$$J_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) \mathrm{d}x, \quad \textit{gde je } n \ge 0, \textit{ važi:}$$

$$J_{2k}(\alpha) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}, \quad J_{2k+1}(\alpha) = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}.$$

Funkcija greške definisana je kao:

$$\text{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} \exp(-x^2) dx.$$

Vrednosti za $\alpha = \pm\infty$ su ± 1, respektivno.

Rešenja

1. (a) Tražene raspodele po brzinama i energijama imaju forme, respektivno:

$$f_{\mathrm{M}}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \qquad f_{\mathrm{M}}(E_{\mathrm{k}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E_{\mathrm{k}}} e^{-\frac{E_{\mathrm{k}}}{kT}}.$$

Najverovatnija brzina, efektivna brzina i najverovatnija energiaj iznose, respektivno:

$$v_{\mathrm{mp}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad v_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad E_{\mathrm{k,mp}} = \frac{kT}{2}.$$

Najverovatnija energija ne odgovara najverovatnijoj brzini zato što interval energije dE nije prosto proporcionalan intervalu brzine dv, već zavisi i od brzine v: $dE = mvdv$.

(b) Traženi procenat čestica iznosi:

$$\frac{\Delta N_{(v \geq 2v_{\mathrm{mp}})}}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-4} + 1 - \mathrm{erf}(2)$$

(c) Traženi procenat iznosi:

$$\frac{p_{(v \geq 2v_{\mathrm{mp}})}}{p} = \frac{44}{3\sqrt{\pi}} e^{-4} + 1 - \mathrm{erf}(2).$$

2. Statistička suma ovakvog gasa iznosi:

$$Z = Z_0 Z_1 = V^N (2\pi mkT)^{3N/2} Z_1,$$

gde je sa Z_0 označena statistička suma za idealan gas bez prisustva spoljašnjeg polja, a sa Z_1 popravka usled postojanja potencijalnog polja:

$$Z_1 = V^{-N} (2\pi L)^N \left(\frac{kT}{C}\right)^{2N} \left[1 - \frac{1}{kT} e^{-\frac{CR}{kT}} \left(1 + \frac{CR}{kT}\right)\right]^N.$$

Tražena Helmolcova slobodna energija i entropija dobijaju se iz:

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln Z_0 - kT \ln Z_1 = F_0 + F_1,$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{\partial F_1}{\partial T} = S_0 + S_1,$$

gde F_0 i S_0 odgovaraju idealnom gasu bez prisustva spoljašnjeg polja, a F_1 i S_1 predstavljaju popravke usled postojanja spoljašnjeg polja.

3. Traženi izraz dat je u formi:

$$n_b(x) = n_{b0} \left[1 - \frac{e_a e_b}{2\varepsilon kT\gamma S} e^{-\gamma(|x| - x_{\mathrm{ob}})}\right],$$

gde je:

$$\gamma = \sum_b \frac{e_b^2 n_{b0}}{\varepsilon kTS}.$$