Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu
19. januar, 2021. godine

Popravka kolokvijuma iz predmeta **Statistička fizika**

(kolokvijum traje 120 minuta)

Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati, označiti u odgovarajućoj kućici na koricama sveske oznakom X. Zadatak obavezno započeti na novoj stranici. Neuredno i nečitko napisani zadaci neće biti pregledani. Odgovori se priznaju samo ukoliko su detaljno obrazloženi i ukoliko je konačan odgovor napisan korišćenjem pune rečenice, bez proizvoljno uvedenih oznaka kao što su strelice i slični simboli. Konačan odgovor uokviriti. Prilikom pregleda zadataka biće ocenjena tačnost i netačnost svega što je napisano u vežbanci, osim nedvosmisleno precrtanih oblasti. Nije dozvoljen izlazak iz sale u prvih 60 minuta.

1. [15]

   (a) Polazeći od Maksvelove raspodele po intenzitetima brzina za slučaj idealnog gasa u stanju termodinamičke ravnoteže, izračunati najverovatniju v_m [1], srednju $\langle v \rangle$ [2] i efektivnu v_{eff} brzinu [2] molekula gasa.

   (b) Izračunati koji deo od ukupnog broja molekula ovakvog gasa ima intenzitete brzina u intervalu između $\langle v \rangle$ i v_{eff} [10]. Rezultat izraziti preko funkcije greške.

2. [15] Posmatra se idealni gas koji se sastoji od N identičnih čestica u potencijalnom polju energije

$$E_{\text{p}} = C\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

   gde je C pozitivna konstanta. Gas se nalazi u stanju termodinamičke ravnoteže.

   (a) Odrediti statističku sumu gasa Z [10] u što kompaktnijoj formi (predlog: $Z = AT^{\alpha}C^{-\xi}$, gde su A, α i ξ konstante);

   (b) Gas može biti ohlađen reverzibilnim adijabatskim procesom modifikacijom potencijalnog polja kroz modifikaciju faktora C. Ukoliko su početna vrednost faktora C i temperature bile C_0 i T_0, respektivno, odrediti temperaturu $T(C, C_0, T_0)$ za proces adijabatskog hlađenja [5].

3. [10]

   (a) Za slučaj trodimenzionalne elektroneutralne sferno-simetrične plazme za koju je ispunjen uslov male perturbacije, izvesti izraz za raspodelu električnog potencijala van oblasti praznog prostora oko čestice ($r \geq r_{\text{ob}}$) [3];

   (b) Objasniti pojam male perturbacije, a zatim ovaj uslov matematički izraziti preko poluprečnika Debaja [3];

   (c) Izvesti izraz za korekciju unutrašnje energije plazme u funkciji makroskopskih parametara, koja potiče od elektrostatičke interakcije između čestica [4].

Napomene:

Za integral u formi:

$$J_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^n \exp{(-\alpha x^2)}\mathrm{d}x, \quad \textit{gde je } n \geq 0, \textit{ važi:}$$

$$J_{2k}(\alpha) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}, \quad J_{2k+1}(\alpha) = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}.$$

$$\textit{Funkcija greške definisana je kao: } \operatorname{erf}{(\alpha)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha} \exp{(-x^2)}\mathrm{d}x.$$

Vrednosti za $\alpha = \pm\infty$ su ± 1, respektivno.

Rešenja

1. (a) Za idealni gas u stanju termodinamičke ravnoteže, Maksvelova raspodela po intenzitetu brzina ima formu:
$$f_{\mathrm{M}}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right).$$
Najverovatnija brzina je ujedno i maksimalna brzina, odnosno dobija se iz uslova ekstremuma funkcije raspodele: $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}/\mathrm{d}v = 0$. Najverovatnija brzina iznosi:
$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$
Srednja vrednost brzine dobija se usrednjavanjem intenziteta brzine prema odgovarajućoj raspodeli:
$$\langle v\rangle = \int_0^{+\infty} v f_{\mathrm{M}}(v)\mathrm{d}v = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^3 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v.$$
i iznosi:
$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}.$$
Efektivna brzina predstavlja kvadratni koren srednje vrednosti kvadrata brzine, tj:
$$v_{\mathrm{eff}} = \left[\int_0^{+\infty} v^2 f_{\mathrm{M}}\mathrm{d}v\right]^{1/2}.$$
i iznosi:
$$v_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

   (b) Traženi procenat molekula je:
$$\delta = \frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{4}{\pi}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) - \sqrt{\frac{6}{\pi}}\exp\left(-\frac{3}{2}\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

2. (a) Tražena statistička suma ima formu $Z = AT^{\alpha}C^{-\xi}$, gde su:
$$A = \left[(2\pi mk)^{3/2}\, 8\pi k^3\right]^N, \quad \alpha = \frac{9}{2}N, \quad \xi = 3N.$$

   (b) Tražena temperatura iznosi:
$$T = T_0\left(\frac{C}{C_0}\right)^{2/3}.$$

3. Videti poglavlje 3.4 sa strane 60 i poglavlje 3.4.1 sa strane 65 iz knjige Jovan Radunović: *Statistička fizika sa kinetičkom teorijom u fizičkoj elektronici.*