Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu
29. jun, 2022. godine

Ispit iz predmeta **Statistička fizika**

(ispit traje 180 minuta)

Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati, označiti u odgovarajućoj kućici na koricama sveske oznakom X. Zadatak obavezno započeti na novoj stranici. Neuredno i nečitko napisani zadaci neće biti pregledani. Odgovori se priznaju samo ukoliko su detaljno obrazloženi i ukoliko je konačan odgovor napisan korišćenjem pune rečenice, bez proizvoljno uvedenih oznaka kao što su strelice i slični simboli. Konačan odgovor uokviriti. Prilikom pregleda zadataka biće ocenjena tačnost i netačnost svega što je napisano u vežbanci, osim nedvosmisleno precrtanih oblasti.
Nije dozvoljen izlazak iz sale u prvih 60 minuta.
Ispitni deo gradiva sastoji se od zadataka 1–5. Studenti koji na kolokvijumu imaju manje od 10 poena, imaju mogućnost da uz ispitne zadatke rade dopunski zadatak 6.

1. [12] Jedan kvantni sistem od N identičnih čestica nalazi se u termodinamičkoj ravnoteži. Sistem ima tri diskretna energetska nivoa kojima odgovaraju energije $E_1 = 0$, $E_2 = \varepsilon$ i $E_3 = 2\varepsilon$. Uz pretpostavku da između čestica sistema nema interakcije, odrediti:

   (a) Statističku sumu jedne čestice Z [3], srednju energiju jedne čestice $\langle E\rangle$ [2] i unutrašnju energiju sistema U [2];

   (b) Verovatnoću da se čestica nalazi na nivou kome odgovara energija E_3, u slučaju visokih temperatura, kada je ispunjen uslov $kT \gg \varepsilon$ [2]. Koliko iznosi očekivana vrednost ove verovatnoće u limitu visokih temperatura? Obrazložiti odgovor [1].

   (c) Srednju energiju jedne čestice u slučaju visokih temperatura, kada važi uslov iz prethodne tačke [2].

2. [15] (a) Koristeći kvantnu statistiku za ravnotežno stanje sistema fotonskog gasa, izvesti Plankov zakon zračenja, odnosno relaciju za gustinu zračenja apsolutno crnog tela u funkciji učestanosti fotona $w(\nu)$ [7].

   (b) Polazeći od izvedene Plankove raspodele, odrediti srednju talasnu dužinu $\langle\lambda\rangle$ zračenja apsolutno crnog tela na temperaturi T [8]. Rezultat izraziti preko Rimanove zeta funkcije.

3. [10] Izvesti izraz za gustinu kvantnih stanja $\rho(E)$ elektrona u metalu [5], a zatim izvesti izraz za srednju vrednost energije jednog elektrona $\langle E\rangle$ na temperaturi apsolutne nule u funkciji E_{F0} [5]. Smatrati da je dno provodne zone izabrano za referentni nivo energiju elektrona ($E_{\mathrm{c}} = 0$ eV) u provodnoj zoni.

4. [10] Za jedan neravnotežni sistem, koristeći Bolcmanovu kinetičku jednačinu napisanu u difuzionoj aproksimaciji i aproksimaciji vremena relaksacije, odrediti srednju vrednost kvadrata intenziteta brzine $\langle v^2\rangle$ čestice.

5. [13] Za integral sudara napisan u Bolcmanovoj formi:

$$I(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t) = n \int d\boldsymbol{p}_2 \int_0^{r_0} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| \big[f_1(\boldsymbol{p}_1')f_1(\boldsymbol{p}_2') - f_1(\boldsymbol{p}_1)f_1(\boldsymbol{p}_2)\big],$$

   izvesti uslove pod kojima integral sudara ima vrednost nula [6] i dokazati da se aproksimacijom binarnih sudara mogu opisati relaksacioni procesi [7]. Smatrati da su sudari čestica potpuno elastični.

Dopunski zadatak:

6. [10] Polazeći od Maksvelove raspodele po impulsima izvesti raspodelu po intenzitetima brzina [4], odrediti efektivnu brzinu [2], izvesti raspodelu po kinetičkim energijama [2] i odrediti srednju energiju [2].

Napomene:

$$\textit{Debajev integral: } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \mathrm{d}x}{\exp(x) - 1} = \Gamma(n+1)\zeta(n+1),$$

gde je sa ζ *označena Rimanova zeta funkcija, a sa* Γ *gama funkcija. Za* $n \in N$, $\Gamma(n+1) = n!$

Za integral u formi:

$$J_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) \mathrm{d}x, \quad \textit{gde je } n \geq 0, \textit{ važi:}$$

$$J_{2k}(\alpha) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}, \quad J_{2k+1}(\alpha) = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}.$$