

Kolokvijum iz predmeta Statistička fizika

(kolokvijum traje 120 minuta)

Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati, označiti u odgovarajućoj kućici na koricama sveske oznakom X. Zadatak obavezno započeti na novoj stranici. Neuredno i nečitko napisani zadaci neće biti pregledani. Odgovori se priznaju samo ukoliko su detaljno obrazloženi i ukoliko je konačan odgovor napisan korišćenjem pune rečenice, bez proizvoljno uvedenih oznaka kao što su strelice i slični simboli. Konačan odgovor uokviriti. Prilikom pregleda zadataka biće ocenjena tačnost i netačnost svega što je napisano u vežbanci, osim nedvosmisleno precrtanih oblasti. Nije dozvoljen izlazak iz sale u prvih 60 minuta.

1. [20] Za idealan gas u termodinamičkoj ravnoteži:
 - (a) Polazeći od Maksvelove raspodele po impulsima čestica, izvesti raspodelu po intenzitetima brzina [4] i energijama [2], a zatim odrediti najverovatniju brzinu v_{mp} [1], srednju brzinu $\langle v \rangle$ [2], efektivnu brzinu v_{eff} [2] i najverovatniju energiju E_{mp} [1]. Obrazložiti zbog čega najverovatnija energija ne odgovara najverovatnijoj brzini [2];
 - (b) Dokazati da broj čestica koje imaju brzine u intervalu od v_{mp} do $\langle v \rangle$ ne zavisi od temperature gasa [6].
2. [10] Za idealni gas koji se sastoji od N čestica koje se nalaze u zapremini V na temperaturi T , data je zavisnost kinetičke energije od impulsa (disperziona relacija) u formi $E_k = E_0 + \alpha p^2$, gde su E_0 i α konstante. Ukoliko se idealni gas nalazi van spoljašnjeg potencijalnog polja, odrediti statističku sumu gasa Z [4], kao i jednačinu stanja [4]. Ukoliko se gas adijabatski proširi iz stanja zapremine V u stanje zapremine $2V$, odrediti temperaturu gasa u novom stanju [2]. Prilikom adijabatskog procesa entropija gasa ostaje konstantna.
3. [10]
 - (a) Polazeći od Maksvel-Bolcmanove funkcije raspodele, odrediti formu Bolcmanove raspodele za slučaj gasa koji se nalazi u spoljašnjem potencijalu U koji zavisi od koordinata samo po jednom izabranom pravcu, npr. $U(x)$ [4];
 - (b) Izračunati srednju vrednost visine na kojoj se nalaze molekuli u izotermnoj atmosferi [3]. Zanimariti promenu gravitacionog ubrzanja sa visinom;
 - (c) Neka je, suprotno Maksvelovoj raspodeli, ispunjeno da svi molekuli kiseonika, molarne mase $M = 32$ g/mol, na površini Zemlje imaju istu brzinu, jednaku efektivnoj brzini za zadatu temperaturu $T = 300$ K. Ukoliko se molekuli kiseonika ponašaju kao idealni gas, odrediti maksimalnu visinu na kojoj se mogu naći molekuli kiseonika. Za vrednost gravitacionog ubrzanja uzeti $g = 9.81$ m/s², a za vrednost univerzalne gasne konstante uzeti $R = 8.3$ J mol⁻¹K⁻¹ [3].

Napomene:

Za integral u formi:

$$J_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) dx, \quad \text{gde je } n \geq 0, \text{ važi:}$$

$$J_{2k}(\alpha) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}, \quad J_{2k+1}(\alpha) = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}.$$

Funkcija greške definisana je kao:

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \exp(-x^2) dx.$$

Vrednosti za $\alpha = \pm\infty$ su ± 1 , respektivno.

Rešenja

1. (a) Tražene raspodele po brzinama i energijama imaju forme, respektivno:

$$f_M(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad f_M(E_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E_k} e^{-\frac{E_k}{kT}}.$$

Najverovatnija brzina, srednja brzina, efektivna brzina i najverovatnija energija iznose, respektivno:

$$v_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad v_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad E_{k,\text{mp}} = \frac{kT}{2}.$$

Najverovatnija energija ne odgovara najverovatnijoj brzini zato što interval energije dE nije prosto proporcionalan intervalu brzine dv , već zavisi i od brzine v : $dE = mv dv$.

- (b) Traženi broj čestica iznosi:

$$N_{v_{\text{mp}} \leq v \leq \langle v \rangle} = N \int_{v_{\text{mp}}}^{\langle v \rangle} f_M(v) dv.$$

Uvođenjem smene:

$$u = v \sqrt{\frac{m}{2kT}},$$

dobija se

$$N_{v_{\text{mp}} \leq v \leq \langle v \rangle} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_1^{4/\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du,$$

što ne zavisi od temperature.

2. Statistička suma ovakvog gasa iznosi:

$$Z = e^{-\frac{NE_0}{kT}} V^N \left(\frac{\pi kT}{\alpha} \right)^{3N/2}$$

Jednačina stanja gasa ima formu $p = nkT = (N/V)kT$. Temperatura nakon izvršenog adijabatskog procesa iznosi:

$$T_2 = 2^{-2/3} T.$$

3. (a) Videti poglavlje 3.2.6 u knjizi J. Radunović: *Statistička fizika sa kinetičkom teorijom u fizičkoj elektronici*.

- (b) Tražena srednja visina molekula iznosi:

$$\langle z \rangle = \frac{kT}{mg}.$$

- (c) Maksimalna visina molekula iznosi:

$$z_{\text{max}} = \frac{3RT}{2Mg}.$$