

Dr Jovan Cvetic

TALASI

Skripta

Prvo izdanje

Beograd. novembar 2003.

TALASI

Skripta

Prvo izdanje

Autor

Dr Jovan Cvetić,
docent Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Predgovor*Recenzenti*

Dr Milesa Srećković
redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Dr Predrag Marinković
vanredni profesor Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu

Izdavač

Autorsko izdanje

Štampa

SGR-ŽIG

Tiraž

150 primeraka

Ova skripta su napisana prema predavanjima koja je autor više godina držao studentima Elektrotehničkog fakulteta u okviru kursa Fizike na prvoj godini studija. Ona se oslanjaju na gradivo izloženo u skriptama "Fizika, I deo" prof. P. Marinkovića. Skripta mogu biti od koristi i studentima drugih fakulteta. Kako se od ove godine predmet Fizika na Elektrotehničkom fakultetu predaje kao jednosemestralni, to je gradivo skraćeno, a sva izvođenja su pojednostavljena vodeći ipak računa da se ne izgubi na opštosti rezultata. Skripta su u potpunosti usaglašena sa III izdanjem zbirke zadataka iz Fizike (K. Nikolić, P. Marinković, J. Cvetić) i sa njom čine celinu. Zato je u ovom (prvom) izdanju izložena samo teorija (mehaničkih) talasa, a probleme treba potražiti u zbirci.

Autor se unapred zahvaljuje na svim dobromernim primedbama, kao i za pomoć pri uočavanju grešaka.

Beograd, novembar 2003.

Dr Jovan Cvetić

Napomena: fotokopiranje ili umnožavanje na bilo koji način ili ponovno objavljivanje ove knjige.
U celini ili delovima, nije dozvoljeno bez izričite saglasnosti i pismenog odobrenja izdavača.

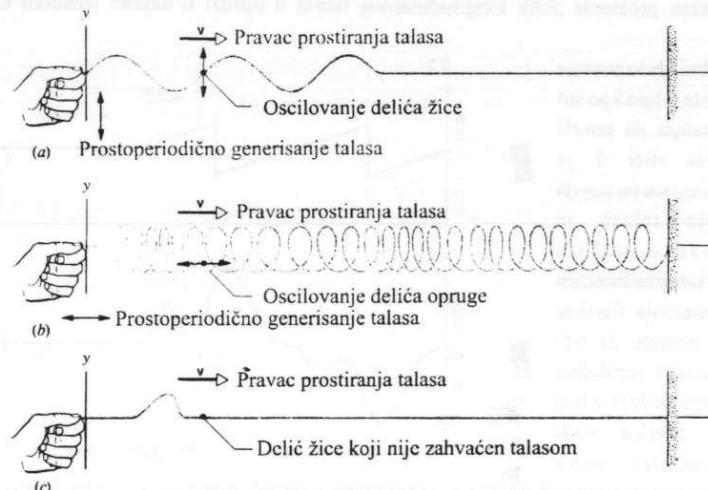
Sadržaj:

1. Uvod	1
2. Transverzalni prostoperiodični talas na zategnutoj žici	3
3. Pojam ravanskih, cilindričnih i sfernih talasa, zraci talasa, polarizacija	5
4. Uticaj sredine na brzinu i amplitudu talasa	7
5. Matematičko opisivanje talasa - progresivni talasi	10
6. Fazna brzina talasa	11
7. Talasna jednačina	12
8. Brzina transverzalnih talasi po žici	13
9. Brzina longitudinarnih talasi po žici	14
10. Brzina talasa u fluidu	16
11. Trenutna i srednja snaga prostoperiodičnih talasa	18
12. Intenzitet talasa	20
13. Talasna impedansa sredine	22
14. Zakon odbijanja i prelamanja talasa	24
15. Koeficijenti refleksije i transmisije talasa	25
16. Koeficijenti refleksije i transmisije snage talasa	28
17. Stopeći talasi i normalni modovi	29
18. Interferencija talasa i izbijanje	35
19. Fazna i grupna brzina talasa	37
20. Dopplerov efekat	38
21. Udarni talasi	41

TALASI

1. Uvod

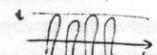
Talas pretstavlja prenošenje poremećaja (energije i impulsa) u prostoru na rastojanjima koja su mnogo veća od amplitude oscilovanja čestica sredine koja prenose talas. Dakle poremećaj se prenosi kroz prostor pri čemu se čestica sredine ne premeštaju nego osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Poznato je da postoje tri vrste talasa: mehanički, elektromagnetski i materijalni¹. Kod mehaničkih talasa čestice sredine su delići materije u gasovitom, tečnom i čvrstom stanju koji osciluju (sabijaju se i šire ili prsto samo kreću) oko ravnotežnih položaja. Elektromagnetske talase u materijalnoj sredini prenose nanelektrisanja bilo da su vezana (nepokretna) kao u dielektrima bilo da su slobodna (pokretna) kao u metalima. Elektromagnetski talasi se takođe prostiru i u vakuumu iako ne postoje čestice sredine u "materijalnom" smislu kakve mi poznajemo. Materijalni talasi se pridružuju subatomskim česticama da bi se opisao njihov položaj, impuls i sl. U ovom tekstu bavimo se mehaničkim talasima sa kojim se najčešće srećemo u praksi. Neki od mehaničkih talasa su i vidljivi golim okom (npr. transverzalne oscilacije zategnute žice) pa to pomaže u velikom broju izvođenja. Na primeru mehaničkih talasa mogu se napraviti brojne analogije sa ostalim talasima i na taj način olakšati njihovo razumevanje.



Slika 1. a) Generisanje transverzalnih talasa na zategnutoj žici. Delići žice osciluju normalno na pravac prostiranja talasa. Elastična sila između delića žice je sila kojom je zategnuta žica; b) Generisanje longitudinarnih talasa u opruzi. Delići opruge osciluju u pravcu prostiranja talasa. Opruga obezbeđuje elastičnu silu između delića; c) Generisanje transverzalnog impulsa duž žice. Obično je brzina prostiranja talasa znatno veća od brzine oscilovanja delića sredine koja prenosi talas.

Premda pravcu prostiranja mehanički talasi se dele na: linijske (jednodimenzionalne, npr. talasi po žici koji se prostiru duž jedne dimenzije), površinske (dvodimenzionalne ili konplane, npr. talasi po površi vode) i zapreminske (trodimenzionalne, npr. talasi (zvuk) u čvrstom, tečnom i gasovitom telu).

Premda načinu oscilovanja čestica sredine talasi se dele na: transverzalne (čestice sredine



¹ Postojanje gravitacionih talasa još uvek nije jasno eksperimentalno potvrđeno.

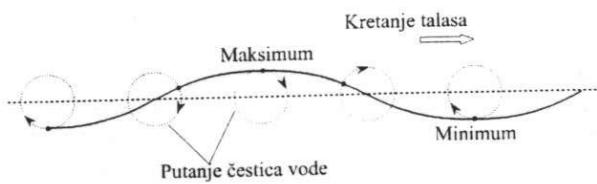
AUSKLAJALNI - samo u ovakvom roku

osciluju normalno na pravac prostiranja talasa) i **longitudinarne** (čestice sredine osciluju po pravcu prostiranja talasa). Da bi postojao transverzalni talas u mehaničkoj sredini mora postojati **poprečna elastična sila** (izražena preko napona smicanja) između slojeva. Takva sila postoji **samo u čvrstim telima dok je u fluidima nema zbog toga što molekuli fluida nisu čvrsto vezani za određenu poziciju u prostoru**. Mehanički longitudinalni talasi postoje u svim materijalnim sredinama.

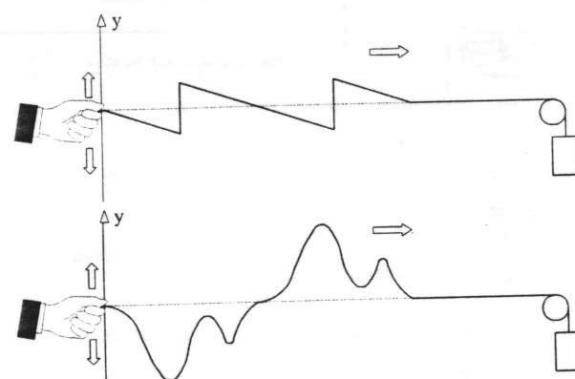
Da bi vizuelno predstavili talas obično se kretanje čestica posmatra na jednom mestu u vremenu ili u jednom trenutku u prostoru. Npr. ako se napravi "snimak" elongacija čestica prenosiča talasa u prostoru u nekom trenutku dobija se prostorni oblik talasa. Na slici 1 a) i c) je prikazan prostorni oblik transverzalnog talasa na žici u nekom trenutku a na slici 1 b) je prikazan prostorni oblik longitudinarnog talasa u opruzi u nekom trenutku tokom prostiranja.

Unutar sredini često postoje istovremeno obe vrste talasa kao što je na primer kod talasa na površi duboke² vode. Na slici 2 je prikazano kretanje čestica na površi vode. Prostiranje talasa je kombinacija transverzalnih (vertikalnih) i longitudinarnih (horizontalnih) pomeranja čestica. Svaki molekul se pomera za isto rastojanje horizontalno i vertikalno od svog ravnotežnog položaja. Zbog toga su putanje čestica vode kružnog oblika odnosno čestice vode osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Posmatrano u dužem intervalu vremena čestice vode ostaju na istom mestu dok se talas prostire s leva na desno određenom brzinom. Dokaz za ovo je nepromjenjen položaj predmeta na vodi posle prolaska talasa izazvanog npr. prolaskom nekog plovнog objekta pored njega. Ako je dubina vode velika oba (površinska) talasa imaju istu brzinu pa ukupan (kombinovan) talas zadržava svoj oblik tokom kretanja. Međutim kada se talas primakne plaži odnosno (kombinovan) talas zadržava svoj oblik tokom kretanja. Međutim kada se talas primakne plaži odnosno (kombinovan) talas zadržava svoj oblik tokom kretanja. Međutim kada se talas primakne plaži odnosno (kombinovan) talas zadržava svoj oblik tokom kretanja. Međutim kada se talas primakne plaži odnosno (kombinovan) talas zadržava svoj oblik tokom kretanja.

Prema obliku talasa u prostoru razlikuju se **prostoperiodični talasi** (sinusne ili kosinusne



Slika 2. Kretanje čestica na površi duboke vode. Talas prenosi kombinacija (horizontalnog) longitudinarnog i (vertikalnog) transverzalnog pomeranja čestica. Ova kombinacija kretanja čini da su putanje čestica kružni.

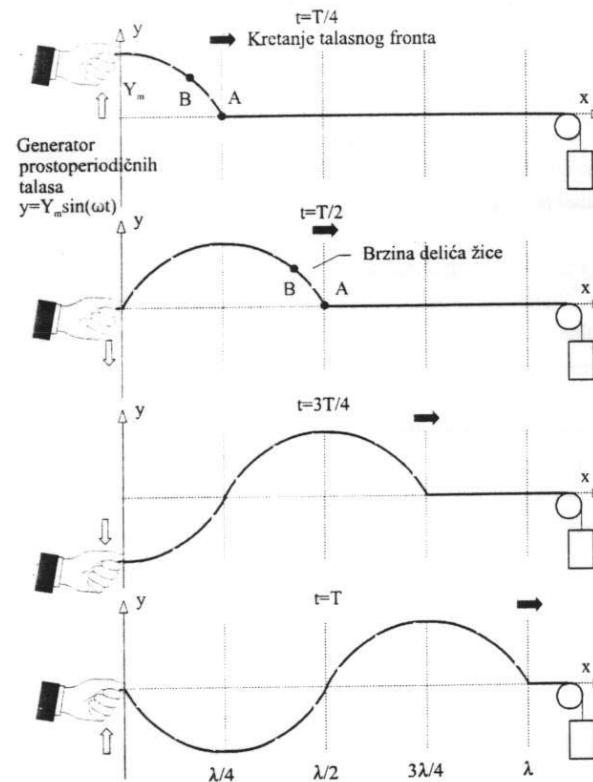


Slika 3. Razni prostorni oblici periodičnih talasa.

funkcije), slika 1 a) i b) i impulsi slika 1 c). U prva dva slučaja čestice sredine su u neprekidnom periodičnom kretanju, jer izvor neprekidno generiše talase dok se kod impulsa kretanje čestica obavlja u periodu kretanja impulsa, pre i posle toga čestice sredine su u stanju mirovanja.

Talas može biti i periodičan, slika 3, ovakav talas se uvek može prikazati kao zbir prostoperiodičnih talasa (preko Fourier-ovih redova) sa diskretnim vrednostima frekvencije komponenti talasa. Zbog toga je poznavanje prostiranja prostoperiodičnih talasa od suštinske važnosti za dalji analizu prostiranja periodičnih talasa. Kretanje talasnih impulsa se izučava koristeći Fourier-ovu transformaciju koja u suštini predstavlja Fourier-ov red sa kontinualnom promenom frekvencije komponenti talasa.

2. Transverzalni prostoperiodični talas na zategnutoj žici



Slika 4. Formiranje transferzalnog prostoperiodičnog talasa na žici. Izvor na levom kraju generiše transverzalnu elongaciju $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi)$, gde je radi jednostavnosti uzeto $\varphi = 0$. Talas se kreće u pozitivnom smjeru x-ose. Strelicama su označene brzine kretanja delića žice. Prostiranje talasa po žici je prikazano u različitim trenucima vremena. Tačka A je tačka talasnog fronta a tačka B je ekvifazna tačka jer se radi o jednodimenzionalnom talasu.

² Prisustvo dna smanjuje brzinu dubljih slojeva vode pa putanje čestica više nisu kružni. Zbog toga se delići tečnosti na bregu površinskog talasa prelivaju preko donjih delova tzv. "dolja" talasa pri čemu se trajno premeštaju u prostoru. Tipičan primer za ovo je ponašanje talasa daleko od obale i pri približavanju plaži.

Najočigledniji i najjednostavniji oblik talasa je transverzalni talas na zategnutoj žici. Da bi smo razumeli stvaranje talasa i definisali osnovne pojmove pri njegovom prostiranju, posmatrajmo generisanje talasa na slici 4.

Generator prostoperiodičnog talasa na levom kraju stvara elongaciju oblika

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

gde radi jednostavnosti posmatrajmo slučaj početne faze generatora $\varphi = 0$. Slika 4 prikazuje elongaciju delića u raznim trenucima ($t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$, $t = T$) duž žice (grafici se mogu shvatiti kao prostorne fotografije elongacije delića žice u raznim trenucima). Vertikalnim strelicama su prikazane brzine delića žice koje su obično mnogo manje od brzine prostiranja talasa.

Talasna dužina talasa je rastojanje koje pređe talas duž žice kada se faza generatora promeni za ugao 2π . Period talasa T je vreme za koje se desi ova promena faze. Kako se talas kretao brzinom v (ova se brzina zove i fazna brzina, vidi poglavlje na strani 11) sledi da je period talasa $T = \lambda/v$, odnosno prema definiciji

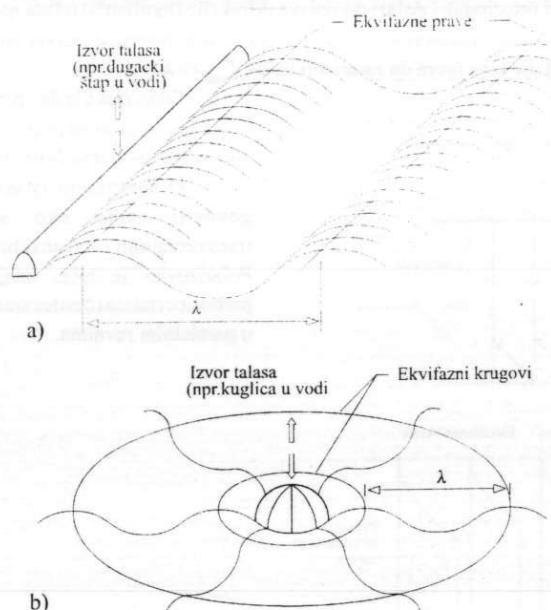
$$\omega \lambda / v = 2\pi, \quad k = \omega / v = 2\pi / \lambda, \quad (2)$$

gde je k tzv. talasni vektor.

Talasni front talasa je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje razdvajaju prostor na dva dela, onaj koji je zahvaćen talasnim procesom i onaj koji nije zahvaćen talasnim procesom. Na primer na slici 4 za prostoperiodičan transverzalni talas na žici tačka A je tačka talasnog fronta. Za nepokretnog posmatrača tačka B pri prostiranju ovog talasa ima neku (rastuću) faznu razliku sa izvorom u tački O.

3. Pojam ravanskih, cilindričnih i sfernih talasa, zraci talasa, polarizacija

Pri prostiranju površinskih (dvodimenzionalnih) i prostornih (trodimenzionalnih) talasa postoji kriva (za površinske) i površ (za prostorne) koja povezuje sve tačke sredine koje imaju istu faznu razliku prema izvoru.



Slika 5 Načini prostiranja površinskih talasa: (a) ravanski, (b) cilindrični talas. Ekvifazne krive su udaljene za jednu talasnu dužinu.

je donji deo munje (dužine oko 1km) prema zemlji manje-više prav i vertikalno dobijamo izvor longitudinarnih zvučnih talasa u vazduhu čije su ekvifazne površi cilindri.

U prirodi su retki izvori koji daju talase čije su ekvifazne površi ravni. Međutim za velike razdaljine od izvora cilindrične i sferne ekvifazne površi praktično prelaze u ravni, jer se zakrivljenosti njihovih površi smanjuju (vidi sliku 6). Dakle, sve ekvifazne površi kod prostornih talasa se mogu aproksimirati ravnima ako se posmatraju sa dovoljno velikog rastojanja.

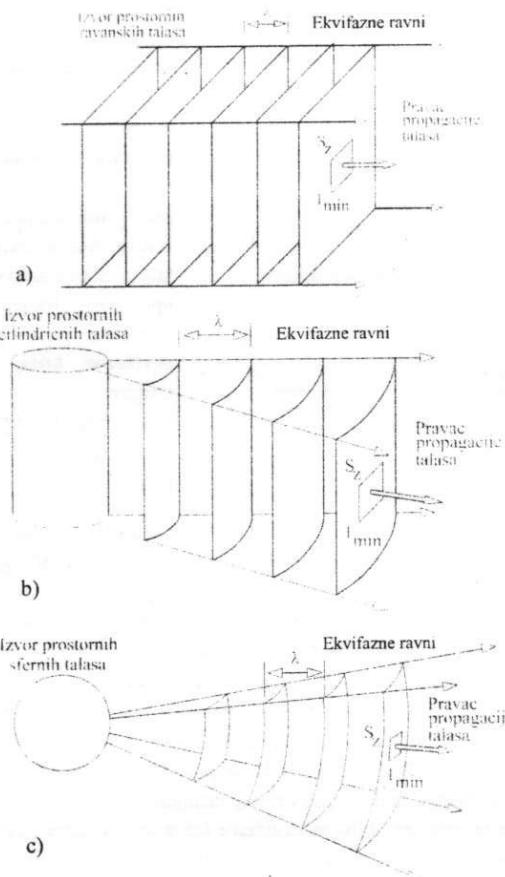
Način prostiranja talasa je određen oblikom ekvifazne krive ili ekvifazne površi. Ekvifazna "kriva" kod jednodimenzionalnog talasa je tačka (npr. tačka B na slici 4). Površinski talasi su ravanski (ekvifazne krive su pravе) ili cilindrični (ekvifazne krive su krugovi), slika 5. Prostorni talasi mogu biti ravanski (ekvifazne površi su ravan), cilindrični (ekvifazna površ je cilindar) i sferni (ekvifazna površ je sfera), slika 6.

Zrak talasa je deo prostora zahvaćen talasom u kome je pravac propagacije približno normalan na (jedan deo) ekvifaznu ravan. Na primer za sferne talase na slici 6c) to je deo prostora oko središnje strelice koji je definisan delom ravni površine S_z koja je tangenta na ekvifaznu površ u posmatranoj

Primer za površinske talase su talasi na površi vode. Ako postoji veoma dugački i prav izvor talasa kao na Sl 5a) (u prirodi takav izvor talasa može da bude rased između tektonskih pliča na dnu mora koje se u toku podmorskog zemljotresa pomere stvarajući talase ogromne visine tzv. talase "cunami") onda su tačke koje pripadaju jednoj pravoj liniji imaju istu fazu prema izvoru. Ako je izvor površinskih talasa tačkast (takvi talasi nastaju npr. posle bacanja kamena u vodu) kao na slici 5b) onda su ekvifazne krive koncentrični krugovi.

Što se tiče prostornih talasa njih je teško slikovito prikazati jer su obično longitudinarni. Na primer bilo koja eksplozija je izvor longitudinarnih talasa u vazduhu (zvuk) čije su ekvifazne površi sfere. Ako na primer smatramo da

tački. Za zrak se može reći da na tom mestu ima površinu poprečnog preseka S_z , slika 6c). Ova površina se mora smanjiti sa približavanjem izvora da bi gornji kriterijum ostao u važnosti (sa smanjivanjem razdaljine se povećava zakrivljenost sfernih površi). Na ovaj način je ograničena maksimalna "debljina" zraka. Sa druge strane ne može se uzeti ni suviše "tanak" zrak. Naime pojam zraka se uvodi da bi se objasnilo pravolinjsko prostiranje talasa (npr. u geometrijskoj optici). Kada se radi o prolazu talasa kroz otvore čije su dimenzije uporedive sa njegovom talasnom dužinom prestaju da važe geometrijski zakoni prostiranja i dolazi do pojave difrakcije (lomljenja) talasa na ivicama. To znači da za pojam zraka postoji ograničenje u pogledu minimalne površine poprečnog preseka tj. minimalne poprečne dimenzije koja mora da zadovolji uslov $l_{\min} >> \lambda$.



Slika 6 Načini prostiranja prostornih talasa: (a) ravanski, (b) cilindrični i (c) sferni talas. Ekvifazne površi su udaljene za jednu talasnu dužinu. Strelice pretstavljaju zrake talasa. Da bi se uveo pojam zraka mora pravac propagacije biti normalan na površ S_z uz uslov $l_{\min} >> \lambda$.

Snop zraka je deo prostora sa više zraka kao što je to na primer pokazano na slici 6 gde snop ima četiri zraka.

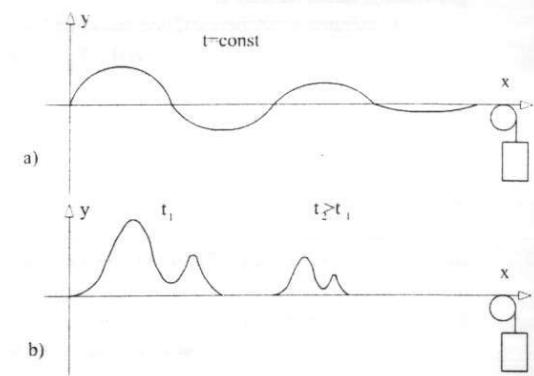
O polarizaciji talasa ima smisla govoriti samo ako se radi o transverzalnim ravanskim talasima. Polarizovan je talas onaj kod koga prenosioči talasa (čestice sredine) osciluju u paralelnim ravnima.

4. Uticaj sredine na brzinu i amplitudu talasa

Sredina kroz koju se prostire talas na razne načine utiče na njegovu amplitudu i brzinu. Ako se amplituda ravanskog talasa smanjuje usled apsorpcije energije (energija talasa se pretvara u toplostu), sredina je **disipativna**³, slika 7. Većina sredina je u manjoj ili većoj meri dissipativna. Na primer u vazduhu se najviše apsorbuju veće frekvencije tako da se na većoj udaljenosti čuju samo niske frekvencije izvora. Svetlosni zraci na zalasku dobijaju crvenu boju (niža frekvencija), jer se veliki procenat viših frekvencija apsorbuje u vazduhu. Na slici 7 (a) je prikazano opadanje amplitude prostoperiodičnog talasa na žici u kojoj postoji dissipacija energije. Ako se u dissipativnoj sredini prostire impuls, slika 7 (b) onda njegova amplituda opada ali "oblik" impulsa ostaje učuvan.

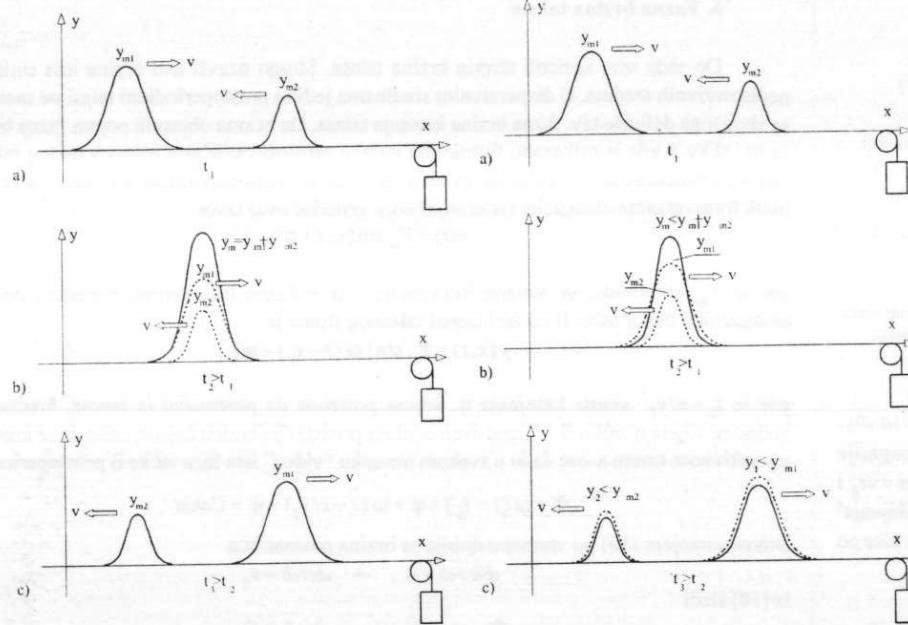
Pojam linearnosti sredine je usko povezan sa principom superpozicije talasa koji se prostiru kroz isti deo prostora. Ovaj princip bi se mogao definisati na sledeći način: ako se dva ili više talasa kreću kroz sredinu rezultantna talasna funkcija u svakoj tački prostora je algebarski zbir talasnih funkcija pojedinih talasa. Drugim rečima, ako je sredina linearna tada talasi koji prolaze istovremeno kroz isti deo prostora ne interaguju međusobno odnosno posle prolaska njihova amplituda i brzina ostaju nepromenjeni. Elongacija nosilaca talasa u tom delu prostora je zbir elongacija koje pojedinačno izazivaju ovi talasi. Ovakvi talasi se često nazivaju linearni talasi i karakterišu ih male amplitude. Jedan slučaj kretanja talasa u linearnoj sredini sa primenom principa superpozicije je slikovito prikazan na primeru prostiranja transverzalnih impulsa po žici na slici 8.

Pri prostiranju talasa u nelinearnim sredinama dolazi do promene oblika oba talasna impulsa posle međusobne interakcije kao što je to prikazano na slici 9.



Slika 7. Prostiranje transverzalnog talasa po žici koja predstavlja dissipativnu sredinu; (a) Prosiranje prostoperiodičnog talasa i (b) impuls. Talas opada po amplitudi zbog apsorpcije energije, u slučaju impulsa oblik mu ostaje nepromenjen. Smanjenje amplitute nastaje samo usled apsorpcije energije, jer je talas po žici jednodimenzionalan

³ Smanjenje amplitude kod prostornih talasa može nastati usled čisto energetskih razloga. Naime pri prostiranju cilindričnih i sfernih talasa u nedisipativnim sredinama (o ovome detaljnije u poglavljju na strani 21) talasno kretanje zahvata sve veći deo prostora. Kako izvor generiše neku određenu energiju talasa u jedinici vremena, prema zakonu o održanju energije amplituda talasa mora da opada sa udaljenosću od izvora. Ovo se ne dešava kod ravanskih talasa.



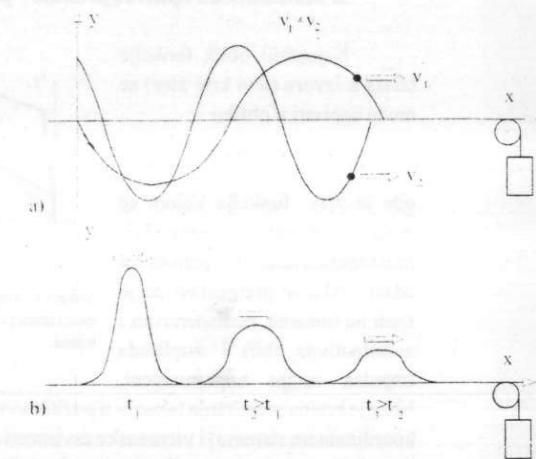
Slika 8. Prostiranje dva transverzalna talasa po žici ako je istezanje žice linearno (princip superpozicije) (a) talasi različitih amplituda se kreću jedan ka drugom, (b) kada se talasi susretnu ukupna amplituda je zbir amplituda pojedinih talasa, (c) talasi se razilaze pri čemu im oblici i amplitude ostaju nepromenjeni. Prema principu superpozicije talasi prolaze jedan kroz drugog bez interakcije (tj. talasi "ne vide" jedan drugog).

Kod disperzivnih sredina brzina prostiranja zavisi od frekvencije (talasne dužine) talasa. Na slici 10 je dat primer prostiranja prostoperiodičnih talasa i impulsa. Razne frekvencije ili talasne dužine se prostiru različitim brzinama. Dobar primer za disperziju prostoperiodičnih talasa je prelamanje (belih) svetlosnih zraka pri prolasku kroz prizmu. Zrak crvene svetlosti se kroz staklo kreće najvećom brzinom i pri prolasku kroz prizmu najmanje skreće u odnosu na prvobitni pravac. Ljubičasta svetlost ima najmanju brzinu pa zrak maksimalno skreće. Zbog toga se na zaslonu iza prizme dobija spektar svih boja. Na sličan način se objašnjava pojava dugih.

Ako se u disperzivnoj sredini prostire impuls, slika 10 (b), dolazi do pojave njegovog "rasplinjanja". Smanjuje se oština ivice signal-a, širina impulsa se povećava uz pad maksimuma, a pojam talasnog fronta, brzine talasa i ekvifaze gubi smisao. Zbog toga se uvodi pojam *grupne brzine talasa* (strana 37). Ponašanje impulsa u disperzivnoj sredini se objašnjava preko brzine prostiranja prostoperiodičnih talasa. Naime svaki impuls (koristeći Fourier-ovu analizu) je moguće predstaviti kao beskonačan zbir prostoperiodičnih komponenti različite amplitute i početne faze. Svaka komponenta se kreće različitom brzinom tako da zbir njihovih amplituda duž pravca prostiranja u nekom trenutku ne daje istu vrednost kao u početnom trenutku. Rezultat je takav da se gubi oština signal-a odnosno dolazi do izobljicanja signal-a kao što je to prikazano na slici 10 (b). U nedisperzivnoj sredini sve komponente se prostiru istom brzinom pa se u tom slučaju govorи о brzini prostiranja impulsa kao celine.

Ako brzina ili amplituda talasa zavise od pravca prostiranja (npr. kod talasa koji se prostiru u kristalima) onda se takva sredina naziva **anizotropnom**. Ako ne zavise onda je sredina **izotropna**.

Retke su sredine koje ne izobljavaju impulse. Na primer **vakuum** je nedispersivna, linearna, nedisperzivna i izotropna sredina kroz koju se prostiru elektromagnetski talasi. Zbog toga oblik impulsa ostaje nepromenjen pri prostiranju, a amplituda opada sa udaljenošću samo kod cilindričnih i sfernih talasa dok kod ravanskih ostaje konstantna.



Slika 10. Prostiranje transverzalnog talasa po žici. Ako je žica disperzivna i nedispersivna sredina: (a) prostoperiodični talasi različite talasne dužine imaju različite brzine, (b) ako se radi o impulsu on se "rasplinjava" pri prostiranju odnosno gubi se oština ivica impulsa.

5. Matematičko opisivanje talasa - progresivni talasi

Najopštiji oblik funkcije talasa u izvoru (levi kraj žice) se može napisati u obliku

$$y_1(x=0, t) = f(t), \quad (3)$$

gde je $f(t)$ funkcija kojom se mogu opisati impuls, prostoperiodični i periodični talasi. Ako se pretpostavi da je sredi na linearne, nedisperzivne i nedisipativne oblike i amplituda impulsa ostaju nepromjenjeni.

Neka je brzina prostiranja talasa v u pozitivnom smjeru x -ose. Na slici 11 su prikazane prostorne (u x - y , koordinatnom sistemu) i vremenske zavisnosti (u t - y , koordinatnom sistemu) transverzalne elongacije žice. Prikazana je elongacija žice po t -koordinati za dve različite tačke posmatranja $x = 0$ i $x = vt_k$ i elongacija žice po x -koordinati za dva različita trenutka t_1 i $t_2 = t_1 + t_k$, gde je $t_k = x/v$ vreme kašnjenja⁴ talasa i zavisi od mesta posmatranja i brzine prostiranja. Ako analiziramo promenu elongacije žice po t -koordinati vidimo da ona na mestu x kasni za vreme t_k tako da je elongacija na tom mestu

$$y_1(x, t) = f(t - x/v), \quad t \geq x/v. \quad (4)$$

Sličnu analizu možemo primeniti ako posmatramo elongaciju talasa po x -koordinati za dva različita trenutka. U trenutku t_1 elongacija žice duž x -ose je

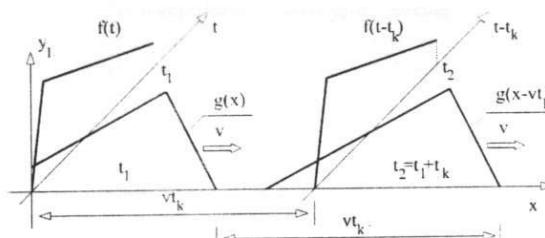
$$y_1(x, t_1) = g(x), \quad (5)$$

gde je $g(x)$ funkcija oblika talasa duž x -ose⁵. Vidimo da se oblik impulsa premešta (translira) po x -osi tako da je elongacija duž žice u trenutku $t_2 = t_1 + t_k$, $y_1(x, t_2) = g(x - vt_k)$, odnosno za bilo koje x i t

$$y_1(x, t) = g(x - vt), \quad x \geq vt. \quad (6)$$

Izrazi (4) i (6) su ekvivalentni u pogledu opisivanja talasa. Oba izraza opisuju *progresivne* (pokretne) talase. U daljem izvođenju opredelićemo se za izraz (4) jer se češće sreće u literaturi. Ako impuls putuje uлево (u negativnom smjeru x -ose) tada je jednačina talasa

$$y_2(x, t) = f(t + x/v). \quad (7)$$



Slika 11. Vremenski i prostorni oblik talasnog impulsa na žici na levom kraju žice (izvor) i posle vremena $t_k = x/v$, na mestu x , gde je v brzina kretanja talasa.

6. Fazna brzina talasa

Do sada smo koristili termin brzina talasa. Strogo uvezši ova brzina ima smisla samo kod nedisperzivnih sredina. U disperzivnim sredinama jedino prostoperiodični talasi ne menjaju oblik pa se zbog toga definiše tzv. fazna brzina kretanja talasa. Da bi smo objasnili pojma fazne brzine vratimo se na sliku 4 gde je prikazano formiranje jednog prostoperiodičnog transverzalnog talasa na žici u raznim trenucima. Izvor talasa na levom kraju žice je prostoperiodičan pri čemu ćemo uzeti opštiji oblik transverzalne elongacije (istezanja) koju generiše ovaj izvor

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (8)$$

gde je Y_m amplituda, ω kružna frekvencija i φ početna faza izvora. Koristeći oblik talasa (4) elongacija u nekoj tački B na žici ispred talasnog fronta je

$$y(x, t) = Y_m \sin[\omega(t - t_k) + \varphi], \quad (9)$$

gde je $t_k = x/v_f$ vreme kašnjenja tj. vreme potrebno da poremećaj iz izvora, krećući se faznom brzinom, stigne u tačku B. Fazna brzina talasa predstavlja brzinu kojom treba da se kreće posmatrač u pozitivnom smjeru x -ose da bi u svakom trenutku "video" istu fazu tačke B prostoperiodičnog talasa

$$\Phi = \omega(t - t_k) + \varphi = \omega(t - x/v_f) + \varphi = Const. \quad (10)$$

Diferenciranjem (10) po vremenu dobija se brzina posmatrača

$$d\Phi/dt = 0, \quad \rightarrow \quad dx/dt = v_f. \quad (11)$$

Iz (10) sledi

$$\Phi = \omega t - kx + \varphi, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad (12)$$

gde je intenzitet talasnog vektora $k = \omega/v_f = 2\pi/(v_f T) = 2\pi/\lambda$, λ talasna dužina talasa (dužina koju pređe talas za vreme jedne periode izvora). Transverzalna elongacija žice u nekom trenutku i na nekom mestu je

$$y(x, t) = Y_m \sin(\omega t - kx + \varphi). \quad (13)$$

Gornji izrazi su izvedeni za jednodimenzionalni talas na žici konstantne amplitudne (bez disipacije) koji se kreće u pozitivnom smjeru x -ose. Definicija fazne brzine je ista i za površinske i prostorne talase i u disipativnim sredinama, jer se ona definiše preko konstantne faze, a ne amplitude talasa. Ako se talas kreće u negativnom smjeru x -ose u izrazu (12) mora staviti $-x$ umesto x shodno izrazu (7). Jednačina prostoperiodičnog talasa je tada

$$y(x, t) = Y_m \sin(\omega t + kx + \varphi). \quad (14)$$

Obično se smer kretanja talasa opisuje talasnim vektorom $\vec{k} = k\vec{e}_x$ koji ima intenzitet definisan izrazom (12) a smer mu je u pozitivnom smjeru x -ose. Član kašnjenja se onda piše $\omega t_k = kx = \vec{k}\vec{x} > 0$ za kretanje talasa u pozitivnom smjeru x -ose i < 0 za kretanje u negativnom smjeru. Ako je kretanje talasa prostorno tada je talasni vektor $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ (k_x, k_y i k_z su projekcije talasnog vektora na x , y i z osu, respektivno), a član kašnjenja $\omega t_k = \vec{k}\vec{r}$, gde je $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ koordinata tačke P u prostoru u kojoj se traži faza talasa. Faza prostornog talasa je

$$\Phi = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi, \quad k = 2\pi/\lambda. \quad (15)$$

Treba još jednom istaći razliku između fazne brzine v_f kojom se prostire poremećaj (talas) i brzine kretanja delića sredine $v = \partial y / \partial t$. Ove dve brzine se jako razlikuju, obično je $v_f >> v$.

⁴ Kašnjenje je uvek dato preko člana x/v koji u linearnoj i nedisperzivnoj sredini ne zavisi od amplitude i oblika impulsa.

⁵ Ova funkcija se može dobiti preko funkcije izvora $g(x) = f(x/v)$, $x \leq vt_1$.

7. Talasna jednačina

Jednačina koja povezuje brzinu talasa sa vremenskom i prostornom promenom elongacije nosilaca talasa se naziva *talasna jednačina*. Izvećemo jednačinu na primeru jednodimenzionalnih transverzalnih talasa na žici. Žicu smatramo linearom (važi princip superpozicije), nedisipativnom i nedisperzivnom sredinom. Parcijalnim diferenciranjem jednačine talasa $y_1(x,t) = f(t - x/v)$ (jednačina (4)) po koordinati x (jer elongacija zavisi od dve nezavisne promenljive) dobijamo

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{df}{d\xi} = -\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y_1}{\partial t}, \quad (16)$$

gde je usvojena smena $\xi = t - x/v$ pa je $\partial \xi / \partial x = -1/v$, a $df/d\xi = \partial y_1/\partial t$ jer je $\partial \xi / \partial t = 1$. Jednačina (16) uvek važi ako je oblik talasa (4). Drugi parcijalni diferencijal po koordinati daje

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{v} \frac{df}{d\xi} \right) = -\frac{1}{v} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f}{d\xi^2}. \quad (17)$$

Parcijalni diferencijal jednačine (4) po vremenu je

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 1, \quad \xi = t - x/v. \quad (18)$$

Drugi parcijalni diferencijal po vremenu je

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}. \quad (19)$$

Iz (17) i (19) sledi talasna jednačina ravanskih talasa za linearnu, nedisipativnu i nedisperzivnu sredinu

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = v_f^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}. \quad (20)$$

Ako umesto oblika talasa (4) zamenimo izraz (7) dobija se ista talasna jednačina

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = v_f^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}, \quad (21)$$

što znači da je i talas koji se kreće u negativnom smeru x-ose rešenje iste talasne jednačine. Pošto je sredina (u ovom slučaju žica) linearna važi princip superpozicije odnosno opšte rešenje talasne jednačine je zbir ova dva rešenja (tzv. d'Alembert-ovo rešenje talasne jednačine). Sabiranjem (20) i (21) dobijamo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_f^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y = y_1 + y_2. \quad (22)$$

Na primer često je pogodno da se komplikovani oblik talasa zameni zbirom jednostavnijih funkcija za koje se pojedinačno talasna funkcija lakše rešava. Primer superpozicije talasa koji se kreću u suprotnim smerovima u linearnoj sredini je dat na slici 8.

U konkretnim slučajevima talasa u materijalnoj sredini potrebno je napisati jednačinu kretanja delića sredine (2. Newton-ov zakon) koji se svodi na oblik dat jednačinama (20) ili (21), a odatle sledi izraz za faznu brzinu za dati talas. Kao primer odredićemo fazne brzine transverzalnih i longitudinarnih talasa po žici kao i faznu brzinu talasa u fluidima.

8. Brzina transverzalnih talasi po žici

Kako je elongacija žice transverzalna, fizička slika dešavanja je jasnija nego u slučaju longitudinarnih istezanja pa ćemo izvođenja početi sa ovim talasima. Primenom 2. Newton-ovog zakona na delić žice odredićemo faznu brzinu jednodimenzionalnih transverzalnih talasa koji se prostiru po žici. Posmatrajmo prostiranje nekog transverzalnog talasa generisanog na levom kraju žice, Slika 12 (a)⁶. Žicu smatramo linearom, nedisipativnom i nedisperzivnom sredinom. Uveličani delić žice i sile koje na njega deluju su prikazani na Slici 12 (b). Žica je homogena (od istog materijala i svuda iste debljine) odnosno njena podužna masa je $\mu = \Delta m / \Delta x = m/L$. Delić žice mase Δm se kreće po vertikalnom pravcu. 2. Newton-ov zakon po y-osi primjenjen na delić žice je

$$F_{y\text{ rez}} = F_y|_{x+\Delta x} + F_y|_x = \Delta m \ddot{y}, \quad (23)$$

gde su $F_y|_{x+\Delta x}$ i $F_y|_x$ sile na delić žice na mestu $x+\Delta x$ (u pozitivnom smeru y-ose) i mestu x (u negativnom smeru y-ose) respectivno, a $\ddot{y} = \partial^2 y / \partial t^2$ ubrzanje delića žice. Kako je

$$F_y|_{x+\Delta x} = F \sin(\theta + \Delta \theta) \approx F \operatorname{tg}(\theta + \Delta \theta) = F \frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta x}, \quad (24)$$

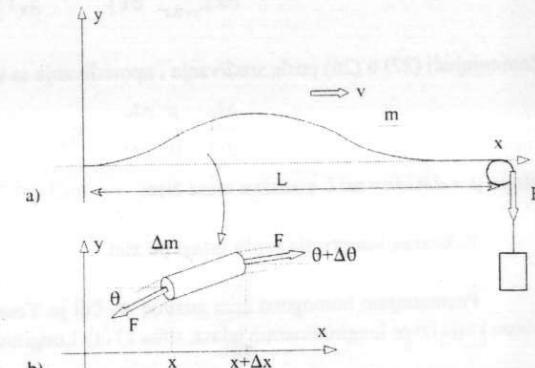
$$F_y|_x = -F \sin \theta \approx -F \operatorname{tg} \theta = -F \frac{\partial y}{\partial x}|_x, \quad (25)$$

gde je korišćena aproksimacija za male uglove $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, iz (23) sledi

$$F \left[\frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}|_x \right] = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (26)$$

Razvijajući funkciju $\partial y / \partial x|_{x+\Delta x}$ u red u okolini tačke x (s obzirom da je dimenzija posmatranog delića žice Δx mala red je moguće ograničiti na samo prva dva člana) sledi

⁶ Na slici 12 je prikazana jako uvećana transverzalna elongacija žice. Za izvođenje talasne jednačine elongacije žice moraju da budu male odnosno ugao tangente prema x-osi u svakoj tački žice mora biti mali. Tada je moguće primeniti aproksimativne formule koje važe za male uglove. Za mala istezanja žica se ponaša **linearno** tj. istezanja su proporcionalna sa rezultantnom vertikalnom komponentom sile što je osnovni preduslov za izvođenje talasne jednačine (22).



Slika 12. a) Prostiranje transverzalnog talasa po žici, (b) delić žice mase Δm se kreće samo po vertikalnom pravcu, sila zatezanja je tangencijalna i ista po intenzitetu sa oba kraja delića.

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \approx \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x + \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_x . \quad (27)$$

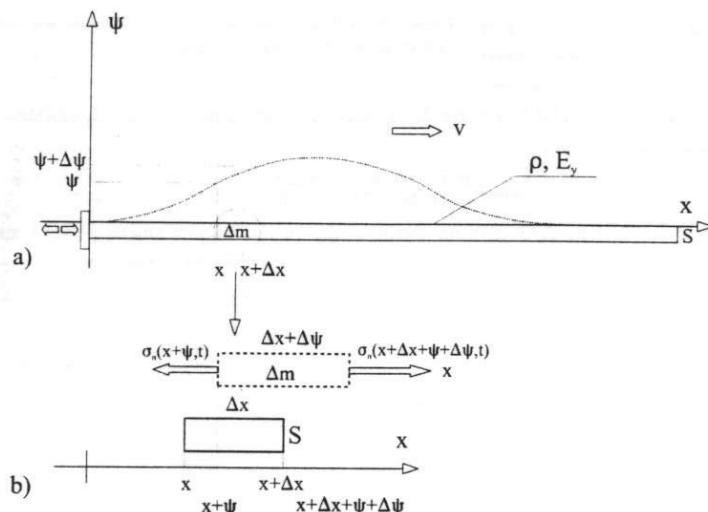
Zamenjujući (27) u (26) posle sređivanja i upoređivanja sa talasnom jednačinom (20) dobijamo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad v_{FT} = \sqrt{F/\mu}, \quad (28)$$

gde je $\mu = dm/dx = m/L$ podužna masa žice.

9. Brzina longitudinarnih talasi po žici

Posmatrajmo homogenu žicu gustine ρ , čiji je Young-ov moduo E_y ⁷, slika 13. Neka je na levom kraju izvor longitudinarnih talasa, slika 13 (a). Longitudinarne elongacije žice u nekom trenutku



Slika 13. a) Prostiranje longitudinarnog talasa po žici, na ordinati je prikazana elongacija ψ svih delića žice u nekom trenutku (elongacija je horizontalna). Posebno je prikazana elongacija jednog uočenog delića dužine Δx (udaljenje levog i desnog kraja posmatranog delića od ravnotežnog položaja), (b) delić žice mase Δm koji se kreće samo u horizontalnom pravcu pod dejstvom normalnih napona koji prema Hooke-ovom zakonu deluju na oba kraja delića. Punom linijom je nacrtan delić pre prolaska talasa, a isprekidan delić u toku prolaska talasa. Prepostavlja se da je $\Delta\psi \ll \Delta x$.

posmatranja (pomeraj delića žice iz ravnotežnih pozicija) su prikazani na ordinati. Uočimo jedan delić

⁷ Istezanje žice je linearno i definisano je Hooke-ovim zakonom istezanja $\sigma_n = E_y \epsilon_r$, gde je $\sigma_n = F/S$ normalni napon (sila F koja deluje na žicu površine poprečnog preseka S), $\epsilon_r = \Delta L/L$ relativno istezanje žice i E_y Young-ov moduo koji zavisi od vrste metala.

žice, dužine Δx , mase Δm na nekom mestu x , slika 13 (a). Kada talas nađe na ovaj delić kraj delića se istegne za dužinu $\psi(x,t)$, a desni za $\psi + \Delta\psi$ (dodatna promena elongacije $\Delta\psi$ nastaje usled promene položaja desnog kraja delića koji je pomeren za Δx). Međutim pošto je istezanje po pravcu prostiranja, stvarne pozicije levog i desnog kraja delića po x -osi su $x + \psi$ za levi i $x + \Delta x + \psi + \Delta\psi$ za desnog kraja, slika 13 (b). Prepostavićemo da je $\Delta\psi \ll \Delta x$ odnosno da promena elongacije desnog kraja usled nailaska talasa uvek zanemariva u odnosu na dužinu uočenog delića. Takođe je $\psi \ll x$. Opravdanost ove aproksimacije će se potvrditi u daljim izvođenjima.

Primenjujući Hooke-ov zakon istezanja na posmatrani delić žice koji se istegne za dužinu $\Delta\psi$, sledi

$$\sigma_n = E_y \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = E_y \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (29)$$

jer se žica isteže samo usled elongacije nastale prolaskom longitudinarnog talasa. Resultantna sila koja deluje na delić žice je posledica dejstva napona na desnog kraju delića $\sigma_n(x + \Delta x + \psi + \Delta\psi, t)S$ i na levom kraju $-\sigma_n(x + \psi, t)S$ (jer deluje u negativnom smjeru x -ose) i prema drugom Newton-ovom zakonu jednaka

$$F_{rez} = [\sigma_n(x + \Delta x + \psi + \Delta\psi, t) - \sigma_n(x + \psi, t)]S = \Delta m a_x = \Delta m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (30)$$

jer je $a_x = \partial^2 \psi / \partial t^2$. Kako je $\Delta m = \rho S \Delta x$, koristeći Hooke-ov zakon za delić žice (29) iz (30) sledi

$$E_y \left[\frac{\partial}{\partial x} \psi(x + \Delta x + \psi + \Delta\psi, t) - \frac{\partial}{\partial x} \psi(x + \psi, t) \right] = \rho \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (31)$$

Na početku analize je prepostavljeno da su istezanja delića žice veoma mala tako da važi $\psi \ll x$ i $\psi + \Delta x + \Delta\psi \ll x$, odnosno moguće je članove u uglastim zagradama na levoj strani izraza (31) razviti u Taylorov red u okolini tačke x . Tako dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x + \Delta x + \psi + \Delta\psi, t) &\approx \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_x (\Delta x + \psi + \Delta\psi), \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi(x + \psi, t) &\approx \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_x \psi. \end{aligned} \quad (32)$$

Zamenjujući izraz (32) u (31) sledi

$$E_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} (\Delta x + \Delta\psi) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (33)$$

Kako je $\Delta\psi \ll \Delta x$ iz (33) sledi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E_y}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (34)$$

Poređenjem jednačine (34) sa talasnom jednačinom (20) dobijamo faznu brzinu longitudinarnih talasa na žici $v_{FL} = \sqrt{E_y / \rho}$.

10. Brzina talasa u fluidu

Zbog odsustva napona smicanja u dubini fluida⁸ (tečnosti ili gasa) postoje samo longitudinarni talasi. Brzinu talasa u fluidu čemo izvesti za ravanske talase (jednačina (20)) i opštem slučaju, a zatim primeniti na nestišljiv fluid (npr. voda) i stišljiv (npr. vazduh).

Modul stišljivosti nekog fluida se definiše kao količnik promene pritiska Δp i relativne promene zapremine $-\Delta V/V$ nastale promenom pritiska (znak “-“ je stavljen zbog promene zapremine koja je negativna $\Delta V < 0$), slika 14:

$$B = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{-\Delta V/V} = -V \frac{dp}{dV}. \quad (35)$$

Modul stišljivosti ima veliku vrednost za tečnosti jer je promena zapremine jako mala. Za idealne gasove postoje dve vrednosti u zavisnosti od brzine promene zapremine.

Ako je promena zapremine veoma brza kompresija gase je adijabatska (nema razmene topline zapremine gase sa okolinom) pa važi jednačina

$$pV^\kappa = \text{Const}, \quad (36)$$

gde je κ adijabatska konstanta gase. Iz (36) diferenciranjem po V sledi

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa p/V. \quad (37)$$

Zamenjujući (37) u (35) dobijamo modul stišljivosti za idealni adijabatski gas

$$B_{ad} = \kappa p. \quad (38)$$

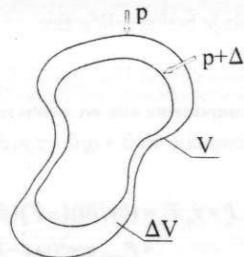
U slučaju spore promene zapremine gase kompresija gase je izotermna (temperatura gase je jednaka temperaturi okoline), a jednačina promene stanja gase je

$$pV = \text{Const}. \quad (39)$$

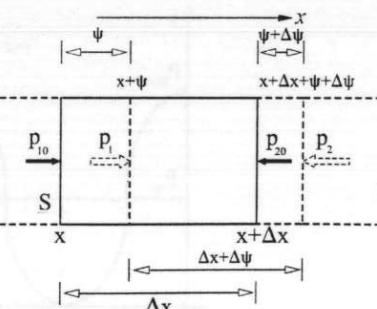
Sličnim postupkom kao u predhodnom slučaju sledi

$$B_{iz} = p. \quad (40)$$

Prostiranje ravanskog (longitudinarnog) talasa predstavljeno je na slici 15. Talas nailazi na delić fluida dužine Δx , mase Δm na mestu x . Levi kraj delića se usled nailaska talasa pomri za ψ (nađe se u položaju $x + \psi$) dok se desni kraj pomri za $\psi + \Delta\psi$ (nađe se u položaju $x + \Delta x + \psi + \Delta\psi$).



Slika 14. Modul stišljivosti fluida se definiše kao $B = \Delta p / (-\Delta V/V)$



Slika 15. Longitudinarni talas nailazi na delić fluida dužine Δx , mase Δm na mestu x . Levi kraj delića se usled nailaska talasa pomri za ψ (nađe se u položaju $x + \psi$) dok se desni kraj pomri za $\psi + \Delta\psi$ (nađe se u položaju $x + \Delta x + \psi + \Delta\psi$).

preseka S , gustine ρ , zapremine ΔV i mase $\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta x$, na mestu x . Pomeraj (elongacija) čestica fluida usled nailaska talasa na levom kraju delića je ψ pa se levi kraj nađe u položaju $x + \psi$, dok je pomeraj čestica fluida na desnom kraju $\psi + \Delta\psi$ pa se on nađe u položaju $x + \Delta x + \psi + \Delta\psi$. Prepostavlja se da je dimenzija posmatranog delića mnogo veća od apsolutne vrednosti pomeraja tj. $\Delta x \gg |\Delta\psi|$. U slučaju fluida uvek se vrši kompresija delića fluida pa je $\Delta\psi < 0$. Pre nailaska talasa pritisak na levom kraju delića je p_{10} i jednak je pritisku na desnom kraju delića p_{20} ($p_{10} = p_{20}$ jer nema kretanja delića, pritisci p_{10} i p_{20} su npr. statički pritisci koji uvek postoje u fluidu u gravitacionom polju). Posle nailaska talasa pritisak na levom kraju delića poraste za Δp_1 i iznosi $p_1 = p_{10} + \Delta p_1 (> p_{10})$ jer se vrši kompresija delića pa se pritisak povećava), a na desnom kraju je $p_2 = p_{20} + \Delta p_2$ ($p_2 > p_{20}$ jer $\Delta p_2 > \Delta p_1$, jer se javi sila koja delić vraća u ravnotežni položaj, a to je moguće samo ukoliko je pritisak na desnom kraju veći od pritiska na levom, zbog čega delići fluida osciluju oko svojih ravnotežnih položaja). Pritisak na desnom kraju se može izraziti preko pritiska na levom kraju razvojem u Taylor-ov red zadržavajući samo prvi član razvoja

$$p_2 = p_1 + (\partial p / \partial x) \Delta x \rightarrow \delta(\Delta p) = \Delta p_2 - \Delta p_1 = (\frac{\partial}{\partial x} \Delta p) \Delta x, \quad (41)$$

gde je sa $\delta(\Delta p)$ označena promena promene pritiska duž delića fluida. Sa druge strane zapremina posmatranog delića fluida je $\Delta V = S \Delta x$, a promena te zapremine pri nailasku talasa je

$$\delta(\Delta V) = S(\Delta x + \Delta\psi) - S \Delta x = S \Delta\psi. \quad (42)$$

Prema (35)⁹ sledi

$$\Delta p = -B \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta V)}{\Delta V} = -B \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = -B \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (43)$$

gde je povećanje pritiska u zapremini ΔV označeno sa $\Delta p = \Delta p_1 \approx \Delta p_2$. Zamenom (43) u (41) dobija se

$$\delta(\Delta p) = -B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta x. \quad (44)$$

Primenom drugog Newton-ovog zakona na delić fluida sledi

$$F_{rez,x} = Sp_1 - Sp_2 = -S(\Delta p_2 - \Delta p_1) = -S \delta(\Delta p) = \Delta m a_x. \quad (45)$$

Kako je $a_x = \partial^2 \psi / \partial t^2$ iz (43) i (45) sledi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (46)$$

Poređenjem (46) sa sa talasnom jednačinom (20) dobijamo faznu brzinu longitudinarnih talasa u fluidu

$$v_{FL} = \sqrt{B/\rho}. \quad (47)$$

Ako je elongacija delića fluida usled prolaska prostoperiodičnog talasa data izrazom (13)

$$\psi(x,t) = \psi_m \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad (48)$$

⁹ U ovom slučaju u definiciji modula stišljivosti (35) posmatrana zapremina je $V \equiv \Delta V$, a njena promena je $\Delta V \equiv \delta(\Delta V)$.

tada je promena pritiska u fluidu prema (43)

$$\Delta p = -B \partial \psi / \partial x = \Delta p_m \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad \Delta p_m = B k \psi_m, \quad (49)$$

gde je Δp_m maksimalna promena pritiska ili amplituda pritiska. Poredjeći izraze (48) i (49) vidi se da su pomeraj i promena pritiska pomereni fazno za ugao $\pi/2$, u nekom trenutku vremena pomeraj je najveći dok je promena pritiska nula i obrnuto.

10.1 Brzina zvuka u gasu

Ako je termalna konduktivnost pri prostiranju zvučnih talasa u gasu zanemariva (nema razmene toplote između slojeva u gasu) prostiranje talaša je adijabatsko i modul stišljivosti nekog idealnog gasa je dat sa (38) pa je brzina zvuka

$$v_{fL} = \sqrt{\kappa p / \rho}. \quad (50)$$

Ovo je fazna brzina zvučnih talasa za čujni frekventni opseg 20Hz-20KHz.

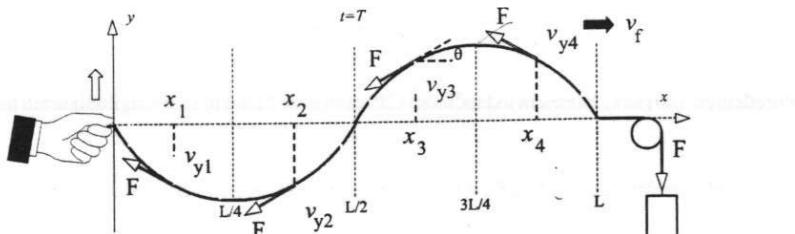
11. Trenutna i srednja snaga prostoperiodičnih talasa

Prosečna i srednja snaga talasa obično se definišu za prostoperiodične talase. U slučaju linijskih (jednodimenzionalnih) talasa (npr. talasi na žici) definiše se izraz za snagu u wattima, u slučaju površinskih (dvodimenzionalnih) talasa definišu se izrazi za podužnu snagu (snaga po jedinici dužine u W/m), dok se u slučaju prostornih (trodimenzionalnih) talasa definišu izrazi za snagu po jedinici površine W/m^2 . Izraze za snagu za linijske talase ćemo izvesti na primerima transverzalnog i longitudinarnog talasa na žici, a za prostorne na primerima longitudinarnog talasa u fluidu.

11.1 Trenutna i srednja snaga transverzalnih talasa na žici

Žica je idealno elastična, dakle nedisipativna i nedisperzivna sredina. Na slici 16 je prikazana elongacija talasa duž žice u trenutku $t = T$. Delići žice imaju jedino poprečnu (y-komponentu) brzinu. Trenutna snaga talasa (snaga koja se prenosi sa leva u desno) $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ na nekom mestu na žici je

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = v_y F \cos \Delta(\vec{F}, \vec{v}) = v_y F_y \geq 0. \quad (51)$$



Slika 16. Vektori brzine i sile na rezilicitim mestima duž žice pri prostiranju prostoperiodičnog talasa po žici u trenutku $t = T$. Izvor na levom kraju žice generiše talas oblike $y(x, t) = Y_m \sin(\omega t - kx)$. Prenos snage duž žice je sa leva u desno. Trenutna (prenesena) snaga na nekom mestu je $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_y v_y$ i uvek je pozitivna jer je ugao između vektora sile i brzine uvek oštar.

Trenutna snaga je uvek pozitivna (npr. za tačku na žici sa koordinatom x_3 na slici 16) jer je ugao između vektora sile zatezanja i brzine delića $0 < \Delta(\vec{F}, \vec{v}_3) \leq \pi/2$. Protok energije je kontinualan i u smeru prostiranja talasa (talas se prostire u pozitivnom smeru x-ose). Ako je transverzalna elongacija žice pri kretanju talasa data izrazom (13)

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad (52)$$

tada je brzina delića žice

$$v_y = \partial y / \partial t = \omega Y_m \cos(\omega t - kx + \varphi). \quad (53)$$

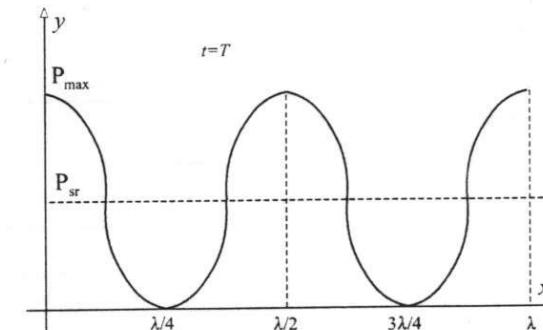
Komponenta sile po y-pravcu za tačku na žici sa koordinatom x_3 je $F_y = -F \sin \theta$. Kako je za male elongacije $\sin \theta \approx \tan \theta = \partial y / \partial x$ sledi

$$P = v_y F_y = (\partial y / \partial t)(-F)(\partial y / \partial x) = -F [\omega Y_m \cos(\omega t - kx + \varphi)] [-k Y_m \cos(\omega t - kx + \varphi)] = P_{\max} \cos^2(\omega t - kx + \varphi), \quad P_{\max} = Y_m^2 k \omega F = Y_m^2 \mu v \omega^2, \quad (54)$$

gdje su zamjenjeni izrazi $v^2 = F/\mu$ i $v = \omega/k$. Snaga na nekom mestu na žici nije konstantna veličina jer snaga izvora osciluje. Kako se energija izvora prostire duž žice ona se transformiše u kinetičku energiju delića i njihovu potencijalnu energiju deformacije. Fizička slika je vrlo slična harmonijskom oscilatoru. Prosečna (srednja) snaga izvora ili prosečna snaga na nekom mestu na žici se računa u toku jednog perioda

$$\langle P \rangle = \int_t^{t+T} P(t) dt = P_{\max} / 2, \quad (55)$$

jer je srednja vrednost $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$. Trenutna snaga duž žice je prikazana na slici 17. Slika odgovara talasu na slici 16.



Slika 17. Trenutna i srednja snaga transverzalnog talasa duž žice u trenutku $t = T$. Grafik snage duž žice odgovara talasu na slici 16.

11.2 Trenutna i srednja snaga longitudinarnih talasa na žici

Prema slici 13 trenutna snaga longitudinarnih talasa na žici je

$$P = v_x F_x = (\partial \Psi / \partial t) (-SE_y) \partial \Psi / \partial x = P_{\max} \cos^2(\omega t - kx + \phi), \\ P_{\max} = \Psi_m^2 k \omega SE_y = \Psi_m^2 S \rho v \omega^2, \quad (56)$$

gde su zamenjeni izrazi $v^2 = E_y / \rho$ i $v = \omega / k$.

Srednja snaga talasa je

$$\langle P \rangle = P_{\max} / 2. \quad (57)$$

11.3 Trenutna i srednja snaga longitudinarnih talasa u fluidu

Na sličan način se može izvesti i izraz za trenutnu snagu ravanskih longitudinarnih talasa u fluidu, slika 15

$$P = v_x S \Delta p_1 = (\partial \Psi / \partial t) (-SB) \partial \Psi / \partial x = P_{\max} \cos^2(\omega t - kx + \phi), \\ P_{\max} = \Psi_m^2 k \omega SB = \Psi_m^2 S \rho v \omega^2, \quad (58)$$

gde su zamenjeni izrazi $v^2 = B / \rho$ i $v = \omega / k$. Srednja snaga talasa je

$$\langle P \rangle = P_{\max} / 2. \quad (59)$$

Ovu snagu je moguće izraziti preko promene pritiska u fluidu. Kako je prema jednačini (43)

$$\Delta p(x,t) = -B \frac{\partial \Psi}{\partial x} = B k \Psi_m \cos(\omega t - kx + \psi) = \Delta p_{\max} \cos(\omega t - kx + \psi), \\ \Delta p_{\max} = \rho v \omega \Psi_m. \quad (60)$$

Iz (58) sledi

$$P = S(\Delta p)^2 / (\rho v). \quad (61)$$

$$\langle P \rangle = S \Delta p_{\max}^2 / (2 \rho v). \quad (62)$$

12. Intenzitet talasa

Kada se radi prostornim talasima (ravanskim, cilindričnim i sfernim) intenzitet talasa se definiše kao **prosečna snaga po jediničnoj površini normalnoj na pravac prostiranja talasa**

$$I = \langle P \rangle / S. \quad (63)$$

Intenzitet ravanskih talasa u fluidu

Za ravanske talase je $S = \text{Const}$. Prema (58), (63) sledi

$$I = \langle P \rangle / S = \Psi_m^2 k \omega B / 2 = \Psi_m^2 \omega^2 \sqrt{\rho B} / 2. \quad (64)$$

Koristeći (49) i (62) intenzitet zvučnih alasa se može izraziti i preko maksimalne promene pritiska

$$I = \Delta p_{\max}^2 / (2 \rho v) = \Delta p_{\max}^2 / (2 \sqrt{\rho B}). \quad (65)$$

Iz (64) se vidi da isti intenzitet zvuka mogu da imaju dva talasa različitih frekvencija i amplituda (potrebno je samo da je član $\Psi_m \omega = \text{Const}$) dok prema (65) sledi da oba talasa imaju istu maksimalnu promenu pritiska Δp_{\max} . Zato je pogodnije opisivati zvučni talas preko fluktuacija pritiska (49) nego preko elongacije delića fluida (48).

12.1 Merenje intenziteta zvučnih talasa - skala decibela

Eksperimenti pokazuju da osetljivost uva zavisi kako od frekvencije tako i od intenziteta zvuka. Što se tiče osetljivosti na intenzitet zvuka ona je približno logaritamska. Zato je moguće čuti izvuk veoma malog i veoma velikog intenziteta. Nivo intenziteta zvuka β se definiše kao

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log(I/I_0), \quad (66)$$

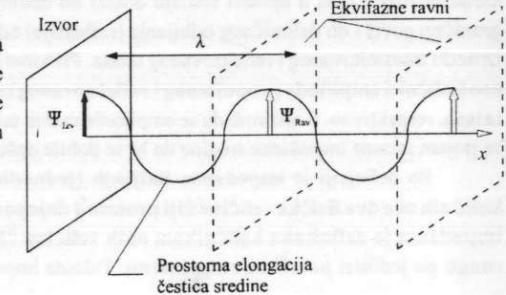
gde je $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ referentni intenzitet zvuka odabran kao prosečni najmanji intenzitet zvuka koji ljudsko uvo može čuti na frekvenciji od 1 kHz. Nivo intenziteta zvuka se izražava u decibelima ($1 \text{ dB} = (1/10) \beta$ jer je bel velika jedinica za tehničku upotrebu).

S obzirom da uvo nije jednako osetljivo u celom čujnom frekventnom opsegu ($\approx 20 \text{ Hz} - 20 \text{ kHz}$, uvo je manje osetljivo naročito na krajevima ovog opsega) pojedini instrumenti za merenje izražavaju nivo intenziteta zvuka u dBA jedinicama. Na ovakvoj skali uzeta je u obzir prosečna frekventna osetljivost uva.

12.2 Promena intenziteta talasa sa rastojanjem

Prema (64) prosečna snaga prostoperiodičnog ravanskog talasa je proporcionalna kvadratu amplitude oscilovanja¹⁰ $\langle P \rangle \propto \Psi_{\text{izv}}^2$. Intenzitet ravanskih talasa je

$$I_{\text{Rav}} \propto \Psi_{\text{izv}}^2 = \Psi_{\text{Rav}}^2, \rightarrow \Psi_{\text{Rav}} = \Psi_{\text{izv}}. \quad (67)$$



Ravanski talas je prikazan na slici 18.

Za cilindrične talase je $S = 2\pi rh$ (h je visina cilindra, slika 19) pa im je intenzitet

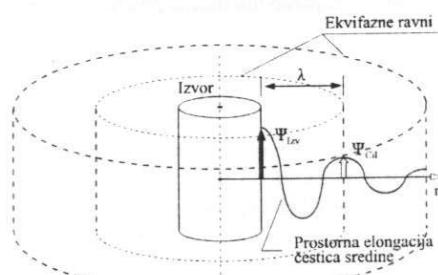
$$I_{\text{cil}} \propto \Psi_{\text{izv}}^2 / r = \Psi_{\text{cil}}^2, \quad \Psi_{\text{cil}} = \Psi_{\text{izv}} / \sqrt{r}, \quad (68)$$

gde je Ψ_{cil} amplituda cilindričnih talasa. Za sferne talase je $S = 4\pi r^2$, slika 20 pa je

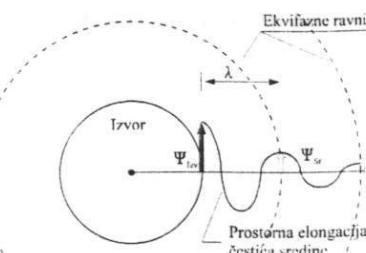
$$I_{\text{sf}} \propto \Psi_{\text{izv}}^2 / r^2 = \Psi_{\text{sf}}^2, \quad \Psi_{\text{sf}} = \Psi_{\text{izv}} / r, \quad (69)$$

¹⁰ Sa Ψ je označena amplituda bilo koje vrste talasa.

gde je Ψ_{sf} amplituda sfernih talasa. Gornji izrazi važe samo za navedene geometrije, npr. unutar neke prostorije zvučni talas može da dođe do slušaoca i preko refleksija. Pri "zvučnom" dizajniranju neke prostorije o tome se mora voditi računa kako bi intenzitet zvuka bio približno konstantan na svakom mestu.



Slika 19. Intenzitet cilindričnih talasa u nedispersivnoj sredini opada inverzno sa kvadratnim korenem rastojanja od izvora, $\Psi_{sf} = \Psi_{izv}/\sqrt{r}$.



Slika 20. Intenzitet sfernih talasa u nedispersivnoj sredini opada inverzno sa rastojanjem od izvora. $\Psi_{sf} = \Psi_{izv}/r$.

13. Talasna impedansa sredine

Ako talas pri svom prostiranju prelazi iz jedne sredine u drugu koja ima drugačije karakteristike¹¹ tada u opštem slučaju dolazi do delimičnog prolaska (transmisije) talasa kroz ovu graničnu površ i do delimičnog odbijanja (refleksije) od nje. Energija upadnog talasa se pri tome deli između transmitovanog i reflektovanog talasa. Pri tome se definišu koeficijenti transmisije i refleksije kao količnici amplituda propuštenog i reflektovanog talasa sa amplitudom upadnog (incidentnog) talasa, respektivno. S obzirom da se amplitude raznih talasa odnose na različite fizičke veličine uvodi se pojam talasne impedanse sredine da bi se dobile opšte formule za pomenute koeficijente.

Po definiciji je **impedansa linijskih (jednodimenzionalnih) talasa u bilo kojoj sredini količnik one dve fizičke veličine čiji proizvod daje snagu talasa. Za površinske i prostorne talase impedansa je definisana količnikom onih veličina čiji proizvod daje snagu po jedinici dužine i snagu po jedinici površine, respektivno.** Talasna impedansa je karakteristika sredine a ne talasa.

¹¹ Npr. za transverzalni talas koji se kreće po jednoj žici i nailazi na drugu žicu različite podužne gustine, zvučni talas koji iz vazduha prelazi u vodu ili obrnuto, elektromagnetski talas (svetlost) koji iz jednog dielektrika (npr. iz vazduha) pada na drugi (npr. staklo) i sl.

13.1 Talasna impedansa žice (transverzalni talasi)

Za transverzalne talase po žici (vidi sliku 16) to je količnik sile $F_y = -F \partial y / \partial x$ koju generiše talas pri prostiranju i brzine delića $v_y = \partial y / \partial t$. Kako je veza parcijalnih izvoda talasne funkcije data izrazom (16) sledi

$$Z_T = F_y / v_y = F / v_{FT} = \sqrt{F \mu}, \quad (70)$$

jer je za transverzalne talase $v_{FT} = \sqrt{F/\mu}$ (izraz (28)) gde je F sila zatezanja i $\mu = m/L$ podužna masa žice.

13.2 Talasna impedansa žice (longitudinarni talasi)

Impedansa žice za longitudinare talase je količnik sile usled normalnog napona na levom kraju delića (vidi sliku 13) $F_x = -\sigma_n(x + \psi, t)S$ koju generiše talas pri prostiranju i brzine delića žice $v_x = \partial \psi / \partial t$. Elongacija delića žice je data opštim izrazom (13) odnosno (52) samo što je u ovom slučaju potrebno pisati longitudinarnu elongaciju ψ umesto y . Kako je $\psi < x$, primenjujući Hookeov zakon (izraz za delić žice (29)) sledi $F_x = -E_y S \partial \psi / \partial x$. Koristeći izraz (16) dobijamo

$$Z_L = F_x / v_x = S E_y / v_{FL} = S \sqrt{E_y \rho}, \quad (71)$$

jer je za longitudinare talase $v_{FL} = \sqrt{E_y / \rho}$ (izraz (34)) gde je E_y Young-ov moduo elastičnosti i ρ gustina materijala žice.

13.3 Talasna impedansa fluida

Talasna impedansa fluida je količnik sile $F_x = S \Delta p$ koja deluje na levoj strani delića fluida na slici 15 koju generiše talas pri prostiranju i brzine delića žice $v_x = \partial \psi / \partial t$. Slično kao i u predhodnim primerima talasnih impedansi elongacija delića žice je data opštim izrazom (13). Promena pritiska u fluidu se može izraziti preko modula stišljivosti (jednačina (43)) pa se na sličan način kao i u predhodnim primerima dobija izraz za talasnu impedansu

$$Z_F = \Delta p / v_x = B / v_{FL} = \sqrt{B \rho}, \quad (72)$$

jer je za longitudinare talase u fluidu $v_{FL} = \sqrt{B / \rho}$ (izraz (47)) gde je B modul stišljivosti i ρ gustina fluida. Npr. za adijabatsko prostiranje zvučnih talasa (fazna brzina je data izrazom (50), a modul stišljivosti sa (38)) talasna impedansa gasa je

$$Z_{Zv} = \sqrt{\kappa p \rho}, \quad (73)$$

gde je κ adijabatska konstanta gasa, p i ρ su pritisak i gustina gasa respektivno.

13.4 Veza talasne impedanse sredine i snage talasa

Ovu vezu možemo izvesti na primeru transverzalnog talasa na žici. Koristeći (54) i (70) snaga talasa se može izraziti kao

$$P = F_y v_y = Z_T v_y^2. \quad (74)$$

Sličan izraz se može izvesti i u slučaju longitudinarnih talasa na žici i longitudinarnih ravanskih talasa

u fluidu pa je vezu snage i talasne impedanse u opštem slučaju moguće napisati kao

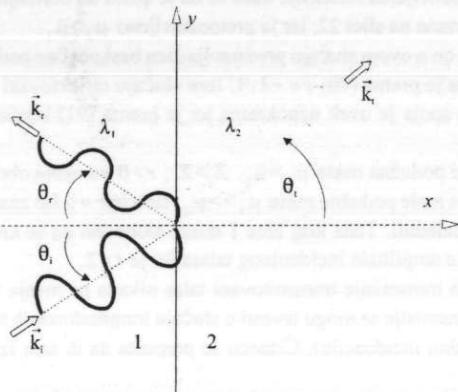
$$P = Z (\partial \Psi / \partial t)^2 , \quad (75)$$

gde je sa $\Psi(x,t)$ označena ona transverzalna ili longitudinarna elongacija delića sredine kroz koju se prostire talas.

14. Zakon odbijanja i prelamanja talasa

Kada prostorni talas pri kosoj incidenciji najde na razdvojnu površ dve sredine različitih talasnih impedansi dolazi do delimične refleksije i transmisije talasa iz jedne sredine u drugu. Pri tome i reflektovani talas i transmitovani talas menjaju pravac kretanja. Zakoni skretanja pravaca talasa su čisto geometrijske prirode i ne zavise od vrste talasa (važe i za longitudinalne i transverzalne talase). Bitno je samo da talasi zadovoljavaju uslov "geometrijskog" predstavljanja¹². Mi ćemo izučavati zakone refleksije i transmisije ravanskih talasa jer se ostale vrste talasa u geometrijskoj interpretaciji zraka talasa svode na ravanske.

Posmatrajmo neki zrak prostornog talasa čiji je talasni vektor \vec{k}_i ($k_i = \omega / v_{f1} = 2\pi / \lambda_1$) koji iz sredine 1 pada na razdvojnu površ pod uglom θ_i prema normali, slika 21. Deo incidentnog zraka se reflektuje pod uglom θ_r prema normali. Reflektovani zrak ima talasni vektor \vec{k}_r istog intenziteta kao i incidentni ($k_r = k_i$ jer se prostire u istoj sredini) i zajedno sa njim definiše incidentnu ravan (ravan crteža). Deo incidentnog zraka se transmituje pri čemu zrak zaklapa ugao θ_t prema normali, a zbog simetrije leži takođe u incidentnoj ravni. S obzirom da se prostire u drugoj sredini talasni vektor transmitovanog zraka je \vec{k}_t ($k_t = \omega / v_{f2} = 2\pi / \lambda_2$).



Slika 21. Zakon odbijanja i prelamanja talasa na razdvojnoj površi dve sredine se izvodi iz jednakosti komponenti talasnih vektora po yosi. Na slici je prikazana transverzalna elongacija čestica.

Granični uslovi zahtevaju da projekcije talasnih vektora na y osu na slici 21 budu jednake odnosno treba da važi

$$k_{iy} = k_{ry} , \quad (76)$$

$$k_{iy} = k_{ty} . \quad (77)$$

Kako je $k_{iy} = k_i \sin \theta_i$, $k_{ry} = k_r \sin \theta_r$ i $k_{ty} = k_t \sin \theta_t$ iz (76) sledi zakon odbijanja talasa

$$\theta_i = \theta_r . \quad (78)$$

Iz (77) sledi Snell-ov zakon prelamanja

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_i}{k_t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_{f1}}{v_{f2}} . \quad (79)$$

Količnik v_{f1}/v_{f2} se naziva indeks prelamanja druge sredine u

odnosu na prvu. Na slici 21 je prikazan slučaj $v_{f2} > v_{f1}$, $\theta_i > \theta_t$.

Iz zakona (78) i (79) mogu da se odrede pravci kretanja zraka, ali ne i amplitude odbijenih i prelomljenih zraka. O ovome će biti reči u sledećem poglavljju.

15. Koeficijenti refleksije i transmisije talasa

Kao što je rečeno kod definisanja talasne impedanse sredine, ona je usko povezana sa koeficijentima refleksije i transmisije. Koeficijenti transmisije i refleksije se definišu kao količnici amplituda oscilovanja čestica sredine propuštenog i odbijenog talasa sa amplitudom upadnog (incidentnog) talasa, respektivno. Kod linijskih (jednodimenzionalnih) talasa i longitudinalnih prostornih talasa postoje dva koeficijenta. Međutim ako transverzalni prostorni talas pada pod nekim uglom na razdvojnu površ dve sredine postoje četiri koeficijenta, dva za refleksiju i dva za transmisiju u zavisnosti od načina polarizacije odnosno od pravca oscilovanja čestica u odnosu na incidentnu ravan.

Navedeni koeficijenti biće izvedeni na primeru refleksije i transmisije transverzalnog talasa koji se kreće po žici. S obzirom da smo uveli pojam talasne impedanse sredine, izvedene formule mogu da se primene i na ravanske longitudinalne talase u fluidu ako se radi o normalnoj incidenciji¹³. Treba reći da ovi koeficijenti imaju smisla samo kod "geometrijske" predstave talasa u kojoj se uvodi pojam zraka talasa. Ako talasi nailaze na objekte koji su manji ili jednaki talasnoj dužini tada dolaze do izražaja difrakcionih i interferacionih efekti koji ne mogu da se opišu pomoću koeficijenata refleksije i transmisije.

Neka se incidentni prostoperiodični transverzalni talas amplitude Y_{im} kreće po žici podužne gustine μ_1 s leva u desno, slika 16 i slika 22. Talas na nekom mestu (npr na mestu x_3 na slici 16) nailazi na drugu žicu neograničene dužine i podužne gustine μ_2 . Obe žice su zategnute silom F i smatramo da su linearne sredine odnosno da važi princip superpozicije talasa. Incidentni talas se delimično reflektuje, a amplituda ovog talasa je Y_{rm} . Na slici 22 je prikazan jedan od načina refleksije pri čemu se menja faza talasa za ugao π . Međutim eventualna promena faze zavisi od odnosa podužnih masa žica odnosno od odnosa njihovih karakterističnih impedansi kao što će biti pokazano u daljem izvođenju. Krive se mogu nacrtati na sledeći način. Tačka A je tačka refleksije incidentnog talasa, isprekidanjem linijom u sredini 2 je prikazan incidentni talas u slučaju da nema refleksije. Tačka B je pomerena za ugao π u odnosu na tačku A, tačka C ima istu fazu kao i tačka B samo je reflektovani talas manje amplitude od incidentnog i kreće se u suprotnom smeru od njega. Talasna dužina ovog talasa je jednaka talasnoj dužini incidentnog, jer se prostiru po istoj žici (isti su im talasni vektori $k_i = k_r = k_1 = \omega / v_{f1}$). Deo incidentnog talasa se prenosi na drugi deo žice kao transmitovani talas. On ima drugačiju talasnu dužinu ($k_t = k_2 = \omega / v_{f2}$)¹⁴. Prepostavljemo radi jednostavnosti izvođenja da je koordinatni početak x0y sistema u tački $x_3 = x = 0$ i da je početna faza incidentnog, reflektovanog i transmitovanog talasa je $\varphi = 0$ ¹⁵. U tom slučaju jednačine incidentnog (13) i reflektovanog talasa (14)

¹³ Pod ovim se podrazumeva upadni talas kod kojeg je talasni vektor normalan na razdvojnu površ dve sredine.

¹⁴ Sva tri talasa imaju istu kružnu frekvenciju i to je jedini parametar koji se ne menja.

¹⁵ Što se tiče incidentnog talasa već je bilo reči o tome da ova konstanta zavisi od kog trenutka se posmatra oscilovanje izvora pa je uvek moguće usvojiti pomenuti uslov. Međutim usvajanje početne faze reflektovanog i transmitovanog talasa znači da njihove amplitude

¹² Uslov je zadovoljen ako talas talasne dužine λ pada na dovoljno veliku razdvojnu površ pri čemu važi $\lambda \ll L_{min}$, gde je L_{min} minimalna dimenzija razdvojne površi.

na mestu $x = 0$ se svode na

$$y_i(x,t) = Y_{im} \sin(\omega t - k_1 x) \rightarrow y_i(x=0,t) = Y_{im} \sin(\omega t), \quad (80)$$

$$y_r(x,t) = Y_{rm} \sin(\omega t + k_1 x) \rightarrow y_r(x=0,t) = Y_{rm} \sin(\omega t). \quad (81)$$

dok je jednačina transmitovanog talasa na istom mestu

$$y_t(x,t) = Y_{tm} \sin(\omega t - k_2 x) \rightarrow y_t(x=0,t) = Y_{tm} \sin(\omega t). \quad (82)$$

Kako na spoju dve žice nema prekida žice, primenjujući princip superpozicije na incidentni i reflektovani talas sledi

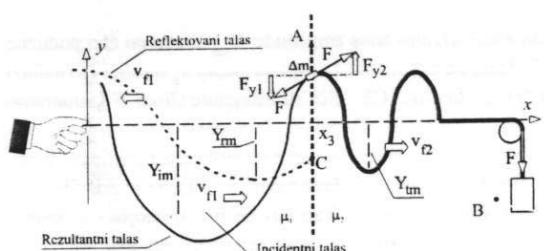
$$y_i + y_r = y_t \Rightarrow Y_{im} + Y_{rm} = Y_{tm}. \quad (83)$$

Po definiciji su koeficijenti refleksije i transmisije, respektivno

$$r = Y_{rm}/Y_{im}, \quad t = Y_{tm}/Y_{im}, \quad (84)$$

pa iz (83) sledi

$$1 + r = t. \quad (85)$$



Slika 22. Refleksija i transmisija transverzalnih talasa na žici. Uzet je primer talasa na slici 16. Incidentni talas amplitude Y_{im} se generiše na levoj strani žice poduzne mase μ_1 i na mestu x_1 nailazi na žicu poduzne mase μ_2 . Reflektovani talas ima amplitudu Y_{rm} , a transmitovani Y_{tm} .

jer je $\Delta m \rightarrow 0$. F_{y2} je sila kojom desni deo žice deluje na delić. Po III Newton-ovom zakonu istim intenzitetom sile suprotnog smera $F'_{y2} = -F_{y2}$ deluje delić na žicu desno generišući transmitovani talas. Iz (86) sledi da je funkcija vertikalne projekcije sile na mestu spoja dve žice neprekidna i da je prema (25)

$$F_{y1} = F'_{y2} \rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (87)$$

dobiju algebarski smisao odnosno da mogu da imaju i negativne vrednosti. To dalje znači da promena faze talasa iznosi ili 0 ili π (jer se samo u slučaju promene faze za π menja znak ispred prostoperiodične funkcije) što se na kraju potvrđuje iz analize koeficijenata.

Primenjujući princip superpozicije na elongaciju leve žice, koju čine elongacije usled incidentnog i reflektovanog talasa, dobijamo $y_1 = y_i + y_r$ dok je za žicu desno $y_2 = y_t$. Iz (87) i jednačina incidentnog (80), reflektovanog (81) i transmitovanog talasa (82) na mestu $x = 0$ sledi

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial y_r}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_t}{\partial x} \right|_{x=0} \rightarrow k_1 Y_{im} - k_1 Y_{rm} = k_2 Y_{tm}. \quad (88)$$

Iz (88) se dobija druga jednačina koja povezuje koeficijente refleksije i transmisije

$$1 - r = (k_2/k_1)t. \quad (89)$$

Iz (85) i (89), koristeći (70) se dobija

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{v_{f2} - v_{f1}}{v_{f1} + v_{f2}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (90)$$

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2v_{f2}}{v_{f1} + v_{f2}} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (91)$$

Kao što je već rečeno koeficijenti refleksije i transmisije imaju algebarski smisao tj. promenna faza reflektovanog talasa može imati vrednosti 0 ili π . Iz (90) i (91) sledi da se vrednost koeficijenta refleksije kreće u granicama $-1 \leq r \leq 1$, a transmisije $0 \leq t \leq 2$.

Npr. za $Z_1 < Z_2$ imamo $r < 0$. Primer za ovo može biti žica 1 sa slike 22 koja je zakačena za žicu 2 veće poduzne mase. Sličan primer je i refleksija zvučnog talasa koji iz vazduha pada na površ vode. Dakle u slučaju negativne vrednosti koeficijenta refleksije kaže se da je došlo do obrtanja faze reflektovanog talasa za ugao π kako je i nacrtano na slici 22, jer je pretpostavljeno $\mu_2 > \mu_1$.

Ako je žica okačena o nepokretni zid, on u ovom slučaju predstavlja žicu beskonačne poduzne mase i tada je $\mu_1 < \mu_2$ odnosno $Z_1 < Z_2$ pa je prema (90) $r \approx -1$. U tom slučaju reflektovani talas ima istu amplitudu kao i incidentni, a tačka spoja je uvek nepokretna jer je prema (91) koeficijent transmisije $t \approx 0$.

Ako je žica 1 zakačena za žicu manje poduzne mase $\mu_1 > \mu_2$, $Z_1 > Z_2$, $r > 0$ pa nema obrtanja faze reflektovanog talasa. Ako je žica 2 veoma male poduzne mase $\mu_1 >> \mu_2$, tada je $r \approx 1$ što znači da je reflektovani talas iste amplitude kao i incidentni. Tada kraj žice 1 može slobodno da se kreće i njegova amplituda dostiže vrednost dvostruke amplitute incidentnog talasa jer je $t \approx 2$.

Zbog pozitivne vrednosti koeficijenta transmisije transmitovani talas nikada ne menja fazu. Identični izrazi za koeficijente refleksije i transmisije se mogu izvesti u slučaju longitudinalnih talasa u žici i ravanskih talasa u fluidu (za normalnu incidenciju). Čitaocu se prepusta da ih sam izvede koristeći se gornjim razmatranjima.

15.1 Refleksija i transmisija prostornih longitudinarnih ravanskih talasa za kosu incidenciju

Ako longitudinarni talas najđe na razvojnu površinu dve sredine pod oštrim uglom u odnosu na normalu kao npr. talas na slici 21 tada je uvek moguće incidentni talasni vektor prikazati kao zbir dva talasnata vektora, vektora koji je paralelan razvojnoj površi (to je u slučaju talasa na slici 21 vektor $\vec{k}_{i\parallel} = k_{iy} = k_i \sin \theta_i$) i vektora koji je normalan na razvojnu površ ($k_{i\perp} = k_{ix} = k_i \cos \theta_i$) odnosno

$$\vec{k}_i = \vec{k}_{i\parallel} + \vec{k}_{i\perp}, \quad \vec{k}_{i\parallel} = k_{iy} \vec{e}_y, \quad \vec{k}_{i\perp} = k_{ix} \vec{e}_x. \quad (92)$$

Deo incidentnog talasa koji je opisan talasnatom vektorom $\vec{k}_{i\parallel}$ prostire se duž razvojne površi bez refleksije i transmisije dok se drugi deo talasa opisan talasnatom vektorom $\vec{k}_{i\perp}$ (koji predstavlja normalnu incidenciju) reflektuje i transmituje prema formulama (90) i (91).

Npr. na slici 21 je prikazana kosa incidencija za talas koji prelazi iz sredine sa većom u sredinu sa manjom talasnatom impedansom, $Z_1 > Z_2$ ($v_{f2} > v_{f1}$). Prema (90) $0 < r < 1$ pa reflektovani talas ne menja fazu, a iz (79) sledi $\theta_t > \theta_i$.

16. Koeficijenti refleksije i transmisije snage talasa

Pri refleksiji i transmisiji se deo snage (energije) talasa vraća ili propušta kroz razvojnu površ. Veza između snage talasa i pomeraja delića sredine je data izrazom (75). Kako je elongacija delića sredine za reflektovani i transmitovani talas definisana izrazima (84) sledi da je snaga reflektovanog dela incidentnog talasa

$$P_r = Z_1 \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial t} \right)^2 = Z_1 \left(\frac{\partial (t\Psi_i)}{\partial t} \right)^2 = r^2 Z_1 \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \right)^2 = R P_i, \quad R = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2, \quad (93)$$

gde je R koeficijent refleksije snage. Za transmitovani deo talasa imamo

$$P_t = Z_2 \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \right)^2 = Z_2 \left(\frac{\partial (t\Psi_i)}{\partial t} \right)^2 = t^2 \frac{Z_2}{Z_1} Z_1 \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \right)^2 = T P_i, \quad T = t^2 \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \quad (94)$$

gde je T koeficijent refleksije snage. Iz (93) i (94) sledi

$$R + T = 1 \rightarrow P_r + P_t = P_i. \quad (95)$$

Relacija (95) pokazuje da su koeficijenti refleksije i transmisije snage u skladu sa zakonom o održanju energije.

17. Stojeci talasi i normalni modovi

17.1 Transverzalni stojeci talasi na žici sa nepokretnim krajem

Da bi došlo do formiranja stojecih talasa sredina kroz koju se prostire talas mora biti linearna tj. mora da važi princip superpozicije. Posmatrajmo refleksiju talasa sa slike 22 i njegovu superpoziciju sa upadnim talasom. Ako je žica na koju nailazi talas velike podužne mase $\mu_1 \ll \mu_2$ prema (90) dobijamo koeficijent refleksije $r \approx -1$. Amplituda reflektovanog talasa (crtkana isprekidana linija) je jednaka amplitudi upadnog, a njegova faza je pomerena za ugao π . Na slici 22 grafik nacrtan tačkom isprekidanim linijom prikazuje podužnu elongaciju nastalu usled upadnog talasa duž žice (odabrana je dužina žice $L = \lambda$ za koju je ispunjen uslov formiranja stojecih talasa što će biti pokazano u daljem tekstu) u raznim trenucima vremena počevši od trenutka $t_0 = T$ (trenutak kada incidentni talas dostiže kraj žice) u inkrementima po $T/8$, pa do trenutka $t_0 + 2T$. Porast vremena na graficima je odozgo na dole. Generator na levoj strani žice generiše transverzalne oscilacije oblika $y(x=0, t) = Y_m \sin(\omega t)$ a upadni talas se prostire duž žice faznom brzinom v_f prema jednačini (52) (radi jednostavnosti je uzeta početna faza generatora $\varphi = 0$)

$$y_i(x, t) = Y_m \sin(\omega t - kx), \quad v_f = \omega / k. \quad (96)$$

Vertikalnim strelicama simbolički su označene brzine delića žice (dužina strelice je približno proporcionalna intenzitetu brzine). Grafik reflektovanog talasa je nacrtan crtkanom isprekidanim linijom, a rezultantni talas punom linijom. Pošto rezultantni talas nastaje superpozicijom upadnog i reflektovanog talasa on po svojoj prostornoj elongaciji kao i po brzini delića predstavlja algebarski zbir ova dva talasa što se jasno vidi na graficima sa slike 22.

Analizom grafika uočava se da postoje tačke duž žice (tzv. tačke čvorova stojecog talasa N) koje se nikad ne pomeraju i koje se nalaze odmaknute jedna od druge za dužinu $\lambda/2$. Čvor je na desnom kraju žice, jer se on ne pomera tj. na tom mestu se uvek elongacije i brzine delića žice upadnog i reflektovanog talasa poništavaju. Tačno na polovini rastojanja između njih se nalaze tačke "brega" stojecog talasa (tačke A) koje imaju maksimalno vertikalno pomeranje odnosno koje u svakom trenutku imaju najveću brzinu. Amplituda stojecog talasa je $2Y_m$ (sabiraju se amplitude upadnog i reflektovanog talasa kada su u fazi kao npr. u trenutku $t = t_0 + T/2$ i $t = t_0 + 2T$).

Od trenutka $t_0 + 2T$ reflektovani talas se ponovo reflektuje od (nepokretnog) levog kraja žice¹⁶ na isti način kao što se reflektovao upadni talas na desnom kraju. Slično bismo dobili i da je dužina žice $\lambda/2, 3\lambda/2, 2\lambda, \dots$ Sa grafika se lako proverava da se čvorovi po drugi put reflektovanog talasa ne poklapaju sa prvobitnim ukoliko se dužina žice razlikuje od gore navedenih vrednosti pa ne dolazi do formiranja stojecog talasa.

Može se zaključiti sledeće: formiranje stojecog talasa pri refleksiji od nepokretnog zida moguće je samo u slučaju da se čvorovi talasa nalaze na krajevima žice tj. da je dužina žice jednak celom broju

¹⁶ Generator na levom kraju žice treba uslovno shvatiti. On je nacrtan da bi slika 22 bila u skladu sa predhodno nacrtanim slikama, a grafici jednostavniji. Naime da bi se stojeci talas održao u svom obliku kao na slici 22 tačka u kojoj se nalazi generator mora biti nepokretna odnosno mora biti čvor stojecog talasa. Generator bi trebalo da se nalazi u jednoj od tačaka "brega" talasa jer su one pokretne. U tom slučaju upadni talas bi se kretao i levo i desno od mesta generisanja reflektujući se od oba kraja. To ne bi promenilo fizičku sliku dešavanja a rezultantni talas bi bio istog oblika kao što je prikazano na slici 22.

polovina talasnih dužina:

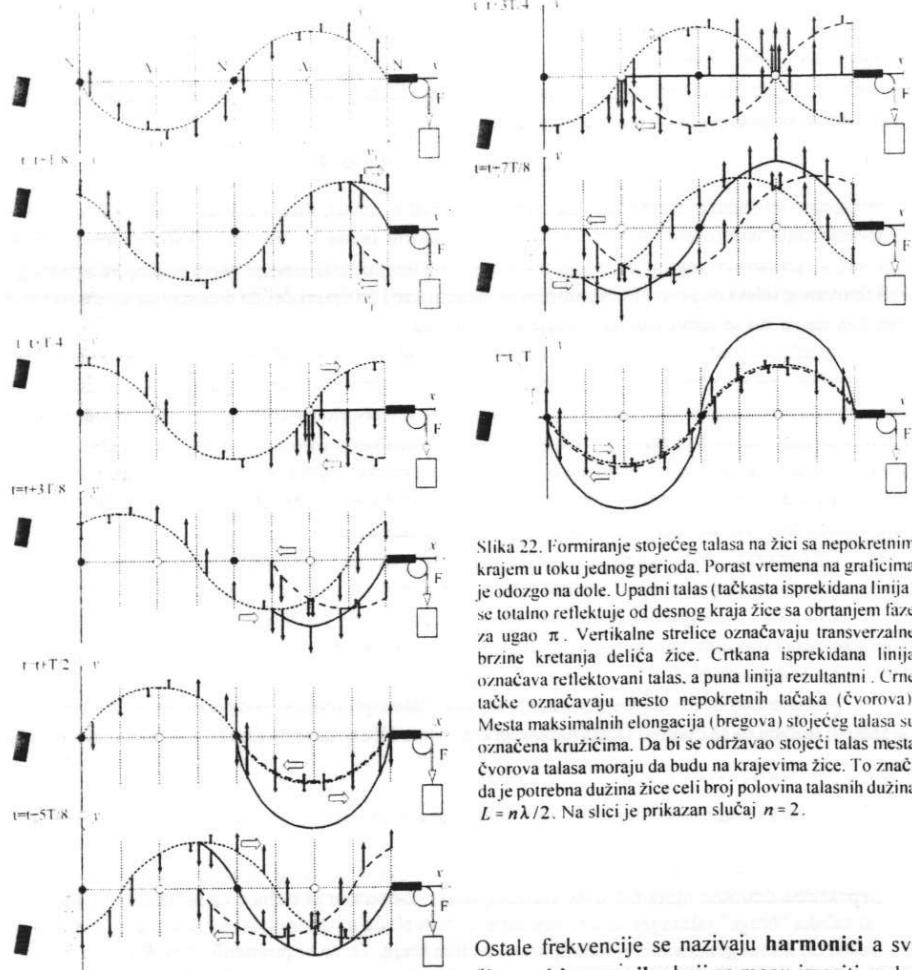
$$L = n\lambda/2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (97)$$

Najmanja dužina žice pri kojoj se formira stojeći talas je $L = \lambda/2$, ($n = 1$). Ako je dužina žice fiksna tada je talasna dužina koja stvara stojeći talas

$$\lambda_n = 2L/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (98)$$

Kako je veza frekvencije i talasne dužine talasa $f_n = v/\lambda_n$ najmanja frekvencija koja odgovara najvećoj talasnoj dužini $\lambda_1 = 2L$ se naziva **osnovna frekvencija**

$$f_1 = v/(2L), \quad v = \sqrt{F/\mu}. \quad (99)$$



Slika 22. Formiranje stojećeg talasa na žici sa nepokretnim krajevima u toku jednog perioda. Porast vremena na graficima je odozgo na dole. Upadni talas (tačkasta isprekidana linija) se totalno reflektuje od desnog kraja žice sa obrtanjem faze za ugao π . Vertikalne strelice označavaju transverzalne brzine kretanja delića žice. Crtana isprekidana linija označava reflektovani talas, a puna linija rezultantni. Crne tačke označavaju mesto nepokretnih tačaka (čvorova). Mesta maksimalnih elongacija (bregova) stojećeg talasa su označena kružićima. Da bi se održavao stojeći talas mesta čvorova talasa moraju da budu na krajevima žice. To znači da je potrebna dužina žice celi broj polovina talasnih dužina $L = n\lambda/2$. Na slici je prikazan slučaj $n = 2$.

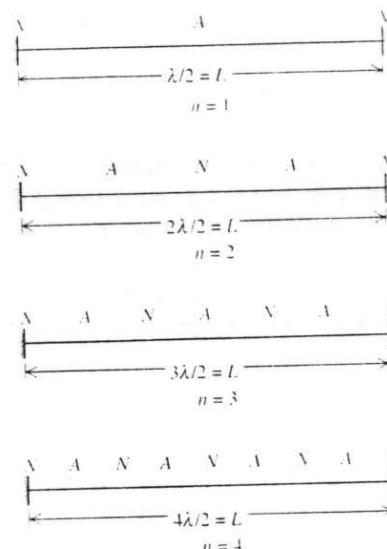
Ostale frekvencije se nazivaju **harmonici** a svi čine **red harmonika** koji se mogu izraziti preko

osnovne frekvencije

$$f_n = nv/(2L) = nf_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (100)$$

Pod pojmom **normalni mod** podrazumeva se kretanje nekog sistema tako da se u njemu sve čestice kreću prostoperiodično sa istom frekvencijom. Npr. za sistem čestica kojeg čini žica dužine L učvršćena na oba kraja, svaka talasna dužina data izrazom (98) predstavlja jedan mogući normalni mod oscilovanja.

Pod **osnovnim modom** oscilovanja podrazumeva se oscilovanje sa talasnom dužinom $\lambda_1 = 2L$ tj. sa osnovnom frekvencijom f_1 . Žica na slici 24 ima beskonačno mnogo normalnih modova oscilovanja od kojih svaki ima svoju karakterističnu frekvenciju i oblik¹⁷. Na slici 24 su prikazana prva četiri normalna moda oscilovanja žice.



Slika 24. Prva četiri normalna moda (harmonika) transverzalni talas na žici učvršćenoj na oba kraja.

Koristeći trigonometrijsku relaciju za zbir uglova $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ iz (102) sledi izraz

$$y_s(x, t) = [-2Y_m \sin(kx)] \cos(\omega t), \quad (103)$$

koji predstavlja jednačinu stojećeg talasa na žici. Prvi deo jednačine u uglastim zagradama opisuje prostorni oblik funkcije amplitude talasa. On pokazuje da je oblik funkcije sinusni sa maksimalnom amplitudom $2Y_m$. Za razliku od progresivnog talasa datog jednačinom (4) ili (13) kod koga se

¹⁷ Žicu modelujemo sistemom koji se sastoji od beskonačno mnogo delića. Nasuprot ovom sistemu harmonički oscilator koji se sastoji od jedne mase i opruge ima samo jedan mod oscilovanja i jednu karakterističnu frekvenciju. Sistem od dve čestice ima dva normalna moda oscilovanja i dve karakteristične frekvencije itd.

poremećaj kreće duž žice nekom faznom brzinom, stojeći talas ostaje na istom mestu pri čemu deo žice između čvorova osciluje u skladu sa drugim delom jednačine oblika $\cos(\omega t)$. Drugim rečima jednačina (103) nije jednačina putujućeg talasa oblika (4) nego neke nove vrste talasa koji se naziva stojeći. Svaka tačka žice osciluje prostoperiodično, a sve susedne tačke između dva čvora osciluju u fazi. Ovo je osnovna razlika stojećeg od putujućeg talasa kod koga se faza susednih tačaka kontinualno menja. Iz jednačine (103) možemo naći mesta čvorova talasa, tačke za koje je elongacija žice jednaka nuli

$$\sin(kx) = 0 \rightarrow kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \rightarrow x = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots \quad (104)$$

Mesta "brega" talasa se dobijaju iz uslova

$$|\sin(kx)| = 1 \rightarrow kx = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots \rightarrow x = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \dots \quad (105)$$

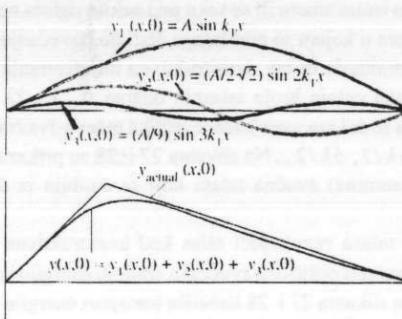
Prema (103) dobijamo amplitudu stojećeg talasa $2Y_m$. Za razliku od putujućeg talasa lako se pokazuje da stojeći talas ne prenosi energiju sa jednog kraja žice na drugi. Postoji lokalni transverzalni prenos energije od čvora ka bregu talasa i nazad, ali je prosečni neto prenos energije nula. To se lako pokazuje koristeći izraz za snagu transverzalnog talasa (54), koristeći jednačinu stojećeg talasa (103)

$$P_s = (\partial y / \partial t)(-F)(\partial y / \partial x) = 4Y_m^2 F \omega k \sin(\omega t) \cos(kx). \quad (106)$$

Srednja snaga je

$$\langle P_s \rangle = 4Y_m^2 F \omega k \cos(kx) \langle \sin(\omega t) \rangle = 0, \quad (107)$$

jer je $\langle \sin(\omega t) \rangle = 0$.



Slika 25. Oscilovanje pobuđene žice je superpozicija normalnih modova. Prikazana su tri modi u početnom trenutku t=0 na kojim je najveća amplitudu i definisane visine tona kojeg proizvodi žica. Amplituda osnovnog modu je označena sa A.

superpozicija mnogo (teorijski beskonačno mnogo) normalnih modova. Svi oni imaju različite amplitude, a pomeranje svake tačke na žici je superpozicija pomeranja svih modova na tom mestu. Na slići 25 je prikazana superpozicija tri normalna moda y_1 , y_2 i y_3 u početnom trenutku koji približno opisuju (osim u okolini oštrog vrha istegnute žice) oblik žice. Najveću amplitudu (označena sa A) ima osnovni harmonik i po tome će se prepoznati visina tona kojeg proizvodi žica. Raspodela amplituda viših harmonika ili tzv. frekventni spektar definisane "boju" tona. Frekventni spektar zavisi od

početnog oblika pobuđene žice, npr. različitu "boju" tona će imati žica gitare pobuđena ispred otvora tela gitare nego na nekom drugom mestu.

Svaki oblik kretanja žice je moguće predstaviti kao superpoziciju normalnih modova oscilovanja. Postupak po kojem se traži amplituda normalnih modova, kao što je to urađeno na slici 25 se naziva **harmonijska analiza**. Zbir prostoperiodičnih funkcija koje predstavljaju složeni talas se naziva **Fourier-ov red**.

17.2 Transverzalni stojeći talasi na žici sa slobodnim krajem

Formiranje stojećih talasa na žici sa slobodnim krajem se razlikuje od predhodnog slučaja samo po mestu formiranja čvorova i "brega" talasa. Posmatrajmo sliku 26 na kojoj je prikazana slična situacija onoj sa slike 22. U ovom slučaju upadni talas nailazi na žicu male podužne mase $\mu_1 >> \mu_2$ pa prema (90) dobijamo koeficijent refleksije $r = 1^{18}$. Amplituda reflektovanog talasa (crtkana isprekidana linija) je jednakam amplitudi upadnog, a promena njegove faze je nula. Na slici 26 tačkom isprekidanom linijom je prikazan grafik podužne elongacije nastale usled upadnog talasa duž žice (odabrana je dužina žice $L = \lambda$ za koju je ispunjen uslov formiranja stojećih talasa) u raznim trenucima vremena počevši od trenutka $t_0 = T$ (trenutak dostizanja kraja žice) u inkrementima po $T/8$ pa do trenutka $t_0 + 2T$. Porast vremena na graficima je odozgo na dole. Generator na levoj strani žice generiše transverzalne oscilacije oblike $y(x=0, t) = Y_m \sin(\omega t)$, a upadni talas se prostire duž žice faznom brzinom v_f prema jednačini (52) (radi jednostavnosti je uzeta početna faza generatora $\varphi = 0$).

Upoređujući grafike sa slikama 22 i 26 uočava se da su čvorovi i "bregovi" talasa zamenili mesta. Rastojanje između njih je $\lambda/2$, a amplituda stojećeg talasa je $2Y_m$. Generator talasa na levom kraju žice je pokretan i predstavlja slobodan kraj¹⁹ od koga se u trenutku $t_0 + 2T$ reflektovani talas ponovo reflektuje na isti način kao što se reflektovao upadni talas na desnom kraju. Stojeći talas se formira za dužine žice $\lambda/2, 3\lambda/2, 2\lambda, \dots$

Može se zaključiti sledeće: formiranje stojećeg talasa pri refleksiji od slobodnih krajeva žice moguće je samo u slučaju da se "bregovi" talasa nalaze na krajevima žice tj. da je dužina žice jednaka celom broju polovina talasnih dužina. Izrazi koji slede su identični izrazima (97)-(100).

Do sličnih zaključaka se može doći i matematičkim putem. Ako je upadni talas koji se kreće s leva u desno opisan funkcijom (96) tada je reflektovani talas koji se kreće u suprotnom smeru prema jednačini (14)

$$y_r(x, t) = +Y_m \sin(\omega t + kx), \quad (108)$$

jer reflektovani talas ne menja fazu. Rezultujući talas je

$$y_s(x, t) = Y_m [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)] = [2Y_m \cos(kx)] \sin(\omega t). \quad (109)$$

¹⁸ Desni kraj žice je sloboden jer tanka žica ima zanemarljivu masu i služi samo da održava silu zatezanja u debeloj žici. Obično se slobodan kraj žice predstavlja jednom alkicom koja je provučena kroz štap kao što je to prikazano na graficima sa slike 26. Koeficijent transmisije je $t \approx 2$ što pokazuje da je amplituda talasa na desnom kraju dva puta veća od amplitude upadnog talasa. Međutim ovo ne znači da postoji snaga transmitovanog talasa. Koeficijent transmisije snage je prema izrazu (94) $T \approx 4Z_2/Z_1 - 0$ a to znači da se sva energija upadnog talasa reflektuje na desnom kraju.

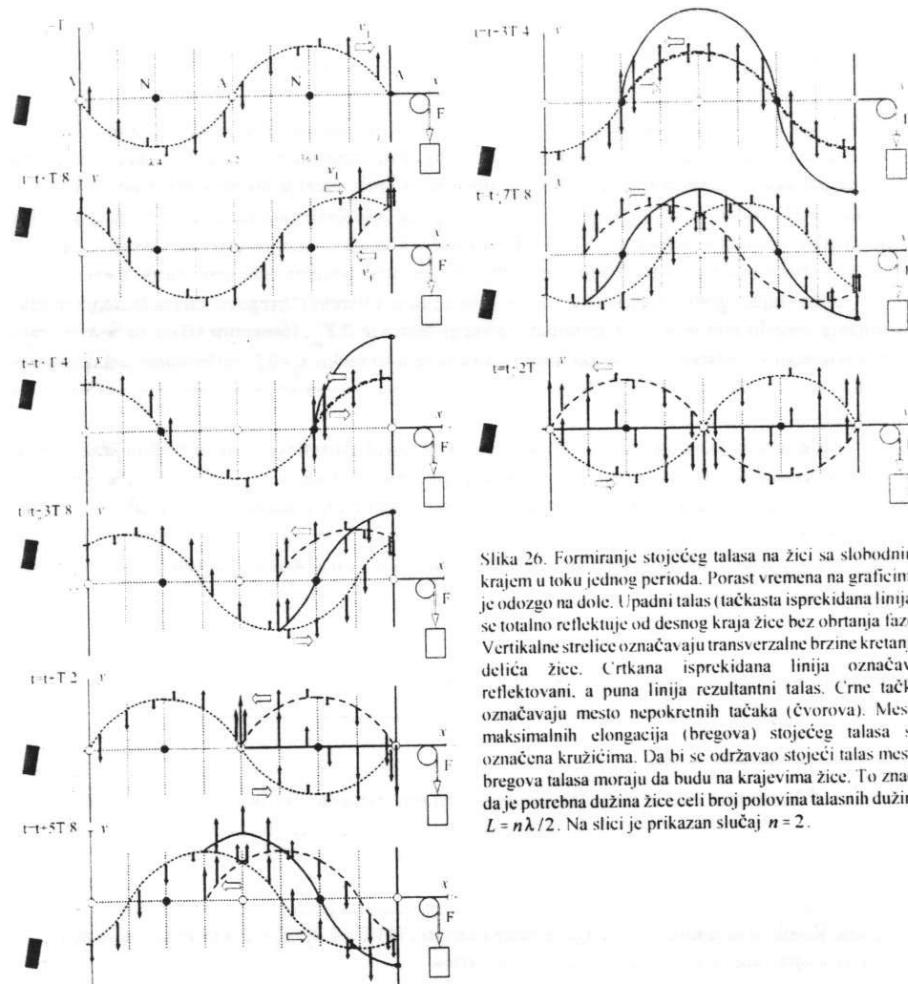
¹⁹ Važi ista primedba za izvor kao i u slučaju refleksije talasa sa slike 22.

koji predstavlja jednačinu stopećeg talasa na žici sa slobodnim krajevima. Prostorni oblik funkcije je kosinusni sa maksimalnom amplitudom $2Y_m$. Iz jednačine (109) možemo naći mesta čvorova talasa. To su tačke za koje je elongacija žice jednaka nuli tj.

$$\cos(kx) = 0 \rightarrow kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots \rightarrow x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots \quad (110)$$

Mesta "bregova" talasa se dobijaju iz uslova

$$|\cos(kx)| = 1 \rightarrow kx = 0, \pi, 2\pi, \dots \rightarrow x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \dots \quad (111)$$

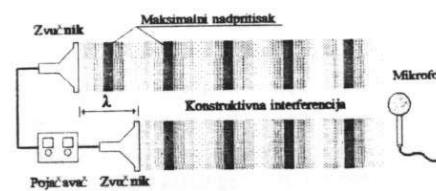


Slika 26. Formiranje stopećeg talasa na žici sa slobodnim krajevima u toku jednog perioda. Porast vremena na graficima je odozgo na dole. Upadni talas (tačkasta isprekidana linija) se totalno reflektuje od desnog kraja žice bez obrtanja faze. Vertikalne strelice označavaju transverzalnu brzinu kretanja delica žice. Crtkana isprekidana linija označava reflektovani, a puna linija rezultantni talas. Crne tačke označavaju mesto nepokretnih tačaka (čvorova). Mesta maksimalnih elongacija (bregova) stopećeg talasa su označena kružićima. Da bi se održavao stopeći talas mesta bregova talasa moraju da budu na krajevima žice. To znači da je potrebna dužina žice celi broj polovina talasnih dužina $L = n\lambda/2$. Na slici je prikazan slučaj $n = 2$.

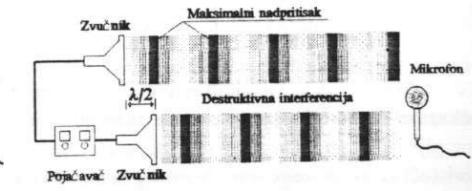
18. Interferencija talasa i izbijanje

18.1 Interferencija talasa iste frekvencije

Pod interferencijom se podrazumeva slaganje dva ili više talasa u istom delu prostora. Da bi došlo do stvaranja interferencijskih efekata potrebnio je da talasi imaju istu frekvenciju i da budu koherennti (razlika početnih faza je konstantna). Npr. stvaranje stopećih talasa je jedan primer interferencije. Tada se dva talasa istih talasnih dužina kreću u suprotnim smerovima stvarajući čvorove i "bregove" talasa koji se ne kreću. Fazna razlika je konstantna, ili je 0 ili π u zavisnosti od vrste refleksije.



Slika 27. Konstruktivna interferencija talasa emitovana iz dva koherentna zvučnika. Mikrofon detektuje maksimalni intenzitet zvuka ako su zvučnici odmaknuti za talasnu dužinu. Tada se mesta maksimalnog nadpritisaka oba zvučna talasa poklapaju.



Slika 28. Destruktivna interferencija talasa emitovana iz dva koherentna zvučnika. Mikrofon detektuje minimalni intenzitet zvuka ako su zvučnici odmaknuti za polovicu talasnog perioda. Tada se mesta maksimalnog nadpritisaka jednog i maksimalnog podprtisa drugog zvučnog talasa preklapaju i poništavaju.

Ako se zraci talasa istih talasnih dužina kreću u istom smeru ili se seku pod nekim uglom neće doći do stvaranja stopećih talasa nego će u delu prostora u kojem se preklapaju doći do povećanja ili smanjenja resultantne amplitudne talasa. Povećanje amplitudne ili tzv. konstruktivna interferencija se dešava uvek kada je razlika puteva dva zraka jednaka celom broju talasnih dužina $0, \lambda, 2\lambda, \dots$. Smanjenje amplitudne ili tzv. destruktivna interferencija se dešava uvek kada je razlika puteva dva zraka jednaka celom broju polovina talasnih dužina, $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \dots$. Na slikama 27 i 28 su prikazane konstruktivna i destruktivna interferencija dva (koherenntna) zvučna talasa koji se emituju iz dva zvučnika, a koje napaja isti izvor²⁰.

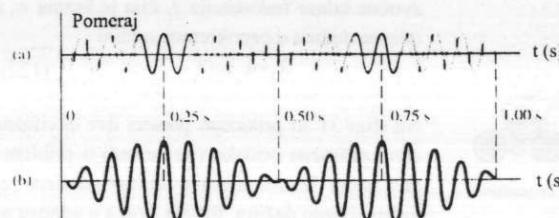
Treba naglasiti da je za razliku od stopećih talasa rezultujući talas kod konstruktivne ili destruktivne interferencije putujući talas. To je lako razumeti pošto oba zvučnika emituju energiju koja se transportuje s leva u desno. Efekat interferencije na slikama 27 i 28 kanalise transport energije po nekim pravcima koji zadovoljavaju gore navedene uslove. Kod stopećeg talasa nema protoka energije kroz čvor talasa.

18.2 Interferencija talasa različite frekvencije, izbijanje

Do efekta pri interferenciji talasa može doći i ako talasi nisu iste frekvencije. Ako interferiraju talasi koji se malo razlikuju u frekvenciji doći će do tzv. pojave izbijanja. Neka se u nekom delu

²⁰ Ako isti izvor napaja oba zvučnika talasi su koherennti. Ovaj eksperiment bi bilo nemoguće izvesti sa dva nezavisna (nekoherenntna) izvora koji bi napajali svaki svoj zvučnik.

prostora preklapaju dva talasa različitih frekvencija i istih amplituda. Na slici 29 su prikazani talasi frekvencija $f_1 = 18 \text{ Hz}$ i $f_2 = 16 \text{ Hz}$, slika 29 a). Rezultantni talas je nacrtan na slici 29 b). Uočava se da su u trenucima $t = 0.25 \text{ s}$ i $t = 0.75 \text{ s}$ oba talasa u fazi pa je rezultujući talas dvostrukog amplitudu. U ovom primeru je frekvencija varijacije amplitude rezultujućeg talasa 2 Hz.



Slika 29. Promena amplitude koja nastaje slaganjem dva talasa na nekom mestu sa frekvencijama koje se malo razlikuju a) pojedinačni talasi $f_1 = 18 \text{ Hz}$ i $f_2 = 16 \text{ Hz}$; b) Rezultantni talas nastao superpozicijom dva talasa. Frekvencija izbijanja je 2 Hz.

Varijacije amplitude prouzrokuju pojačanje i slabljenje intenziteta talasa koji se naziva *izbijanje*, a frekvencija sa kojom se ponavlja promena amplitude se naziva *frekvencija izbijanja*. Frekvencija izbijanja je razlika frekvencija upadnih talasa a ovo se može pokazati i matematičkim putem. Neka je jednačina prvog talasa na nekom mestu (stavimo npr. $x = 0$)

$$\Psi_1(t) = \Psi_m \sin(\omega_1 t), \quad (112)$$

a na istom mestu jednačina drugog talasa

$$\Psi_2(t) = \Psi_m \sin(\omega_2 t + \pi) = -\Psi_m \sin(\omega_2 t), \quad (113)$$

gde je predpostavljeno da su talasi iste amplitude i da su na datom mestu u početnom trenutku koherenti sa početnom fazom pomerenom za π^{21}). Koristeći trigonometrijsku smenu

$$\sin \alpha \mp \sin \beta = 2 \sin[(\alpha \mp \beta)/2] \cos[(\alpha \pm \beta)/2], \quad (114)$$

iz (112) i (113) sledi

$$\Psi_{\text{izb}}(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = [2\Psi_m \sin(\omega_{\text{izb}} t)] \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \quad \omega_{\text{izb}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}. \quad (115)$$

Deo jednačine (115) u uglastim zagradama definiše amplitudu rezultantnog talasa izbijanja. Ona se menja sporo, u datom primeru je $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\omega_2 = 2\pi f_2$, $\omega_{\text{izb}} = \pi(f_1 - f_2)$ pa je period izbijanja

$$f_{\text{izb}} = 2\omega_{\text{izb}}/(2\pi) = f_1 - f_2 = 2 \text{ Hz}, \quad T_{\text{izb}} = 1/f_{\text{izb}} = 0.5 \text{ s}. \quad (116)$$

gde je frekvencija promene amplitude $\omega_{\text{izb}}/(2\pi)$ pomnožena sa faktorom 2, jer se detektuje intenzitet talasa, a on je proporcionalan kvadrat amplitude koja prođe kroz dva maksimuma i dva minimuma po periodu. To se jasno vidi na i na slici 29.

Dруги део једначина (115) се менја према кохерентном закону и средњој frekvenciji $\omega_{\text{sr}} = (f_1 + f_2)/2 \approx f_1 \approx f_2$ jer je $f_1 \approx f_2$. Frekvencija rezultantnog talasa se мало menjaju, jer se frekvencije upadnih talasa мало razlikuju. Ljudsko уво да чује izbijanje do око 6 или 7 Hz. Ако је разлика frekvencija већа не чује се individualno izbijanje negо се чује složeni talas за који се kaže да је konsonantan ili disonantan u зависности u којем односу стоје frekvencije upadnih talasa.

²¹ Kod pojave izbijanja dva talasa moraju biti "periodično koherenti". U ovom примеру pomeraj faze iznosi π za $t = 0$, isti pomeraj faze će se ponavljati u intervalima u kojima se ostvari celi broj perioda i jednog i drugog talasa, npr. u gornjem primeru najmanji interval za koji će se to ostvariti je $T_{\text{izb}} = 0.5 \text{ s}$, prvi talas napravi 9 oscilacija a drugi 8.

19. Fazna i grupna brzina talasa

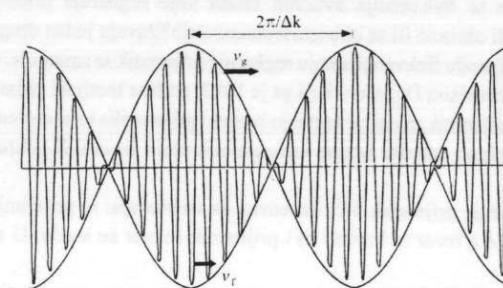
Jasno je iz izloženog da se u disperzivnim sredinama brzina periodičnog talasa ili impulsa ne može definisati preko faze brzine. Impuls se "rasplinjava" odnosno menja oblik pri kretanju kroz ovaku sredinu. Drugim rečima, ako posmatramo kretanje jednog impulsa njegova brzina premeštanja u prostoru zavisiće od njegovog oblika. Problem je kako u ovakvim sredinama definisati brzinu talasa. Da bi ovaj problem opisali analitički, periodičnog talasa ili impulsa se prema Fourier-ovoj analizi u linearnej sredini može razložiti u spekter prostoperiodičnih talasa. U disperzivnoj sredini svaki od ovih talasa ima svoju faznu brzinu koja se može odrediti iz diferencijalne jednačine koja opisuje kretanje talasa u toj sredini. Slaganjem (superpozicijom) ovih komponenti spektra na nekom mestu i u nekom kasnjem trenutku dobija se novi oblik impulsa. Ako je oblik incidentnog talasa periodičan Fourier-ovoj analiza se svodi na Fourier-ov red, a ako je oblik incidentnog talasa impuls neophodno je koristiti Fourier-ove integrale koji predstavljaju generalizaciju Fourier-ovih redova.

Razmotrimo najprostiji slučaj dva talasa (najprostija talasna grupa) koji se kreću u istom smeru a čije se frekvencije (kao i talasne dužine ili talasni vektori) malo razlikuju. Neka su talasi istih amplituda. Ovi talasi predstavljaju najprostiji talasni paket. Oblik talasa je

$$\Psi_1(x, t) = \Psi_m \sin(\omega_1 t - k_1 x), \quad \Psi_2(x, t) = \Psi_m \sin(\omega_2 t - k_2 x), \quad (117)$$

gde je kružna učestanost drugog talasa $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_1$ i talasni vektor $k_2 = k_1 + \Delta k$, $\Delta k \ll k_1$. U jednačinama talasa (117) je radi jednostavnosti pisanja usvojena početna faza oba talasa jednaka nuli. Koristeći trigonometrijsku smenu (114) sledi

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = \left[2\Psi_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \right] \sin\left[\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) t - \left(k_1 + \frac{\Delta k}{2}\right) x\right] \approx \\ &\approx \left[2\Psi_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \right] \sin(\omega_1 t - k_1 x), \end{aligned} \quad (118)$$



Slika 29. Superpozicija dva sinusna progresivna talasa bliskih frekvencija $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega_1$) i istih amplituda. Prikazane su fazna brzina $v_f = \omega/k$ i grupna brzina $v_g = d\omega/dk$ (brzina kretanja envelope rezultantnog talasa).

jer je $\Delta\omega \ll \omega_1$ i $\Delta k \ll k_1$. Deo jednačine (118) u uglastim zagradama definiše amplitudu rezultantnog talasa (anelopu) talasne grupe. Grafik rezultantnog talasa je prikazan na slici 29.

Grafik je sličan grafiku izbijanja na slici 29, sa razlikom da je izbijanje *lokalna pojava* (na jednom mestu u prostoru) dok se grafik sa slike 29 odnosi na interferencione efekte dva talasa bliskih frekvencija u prostoru i vremenu²². Rezultantni talas ima približno nepromjenjeni talasni

²² Ukoliko posmatramo izbijanje od pojave maksimuma (za $t = 0.25 \text{ s}$) jednačina (115) se dobija iz jednačine (118) za $x = 0$.

vektor i kružnu frekvenciju (k , ω), ali mu je amplituda modulisana anvelopom čiji je talasni vektor $\Delta k/2$ i kružna frekvencija $\Delta\omega/2$. Mada je talasna dužina modulisanog talasa $4\pi/\Delta k$, mesta pojedinih maksimuma anvelope su udaljena za polovinu te vrednosti odnosno za $2\pi/\Delta k$. Maksimumi anvelope se ponavljaju u periodima $2\pi/\Delta\omega$. Pošto se maksimumi premeštaju u prostoru brzinom $\Delta\omega/\Delta k$, grupna brzina v_g talasne grupe je

$$v_g = \Delta\omega/\Delta k \rightarrow v_g = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (119)$$

Ako je poznato kako kružna frekvencija zavisi od talasnog vektora $\omega = \omega(k)$ (ova jednačina se naziva *disperzivna relacija*) lako je izračunati grupnu brzinu talasa. Mada je definicija (119) izvedena na primeru dva talasa, nju je moguće primeniti u mnogo složenijim talasnim paketima izvedenim na primeru dva talasa. Nju je moguće primeniti u mnogo složenijim talasnim paketima izvedenim na primeru dva talasa. Grupna brzina se može izraziti i preko fazne brzine. Kako je $\omega = v_f k$ grupna brzina je

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_f k) = v_f + k \frac{dv_f}{dk}. \quad (120)$$

Iz $k = 2\pi/\lambda$ sledi

$$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda = -k \frac{d\lambda}{\lambda}, \rightarrow v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \quad (121)$$

Sredina u kojoj fazna brzina talasa ne zavisi od talasne dužine ($dv_f/d\lambda = 0$, $v_g = v_f$) naziva se **nedisperzivnom**. Sredina u kojoj je $dv_f/d\lambda \neq 0$ se naziva **disperzivnom**. Disperzivne sredine u kojima je $dv_f/d\lambda > 0$ ($v_g < v_f$) su **normalne**, a u kojima je $dv_f/d\lambda < 0$ ($v_g > v_f$) su **anomalne**.

20. Dopplerov efekat

Eksperimentalno je utvrđeno da se frekvencija zvučnih talasa koje registruje prijemnik povećava kada se izvor kreće ka njemu ili obrnuto ili se oba istovremeno približavaju jedan drugom. Kada se izvor i prijemnik međusobno udaljavaju frekvencija koju registruje prijemnik se smanjuje. Ova pojava se naziva Doppler-ov efekat po Christianu Doppleru koji ga je 1842. godine teorijski objasnio.

Kako frekvencija koju registruje prijemnik zavisi od kretanja izvora i prijemnika to se merenjem frekvencije ili njene promene mogu precizno odrediti brzine kretanja pokretnih izvora ili pokretnih prijemnika koji reflektuju talase.

Zavisnost frekvencije koju registruje prijemnik biće izvedena za tri slučaja: a) prijemnik se kreće, a izvor miruje, b) prijemnik miruje a izvor se kreće i c) i prijemnik i izvor se kreću. U svim slučajevima sredina je nepokretna.

20.1 Pomena frekvencije usled kretanja prijemnika

Neka nepokretni izvor $v_i=0$ emituje zvučne talase frekvencije f_i čija je brzina c , a talasna dužina u nepokretnoj sredini

$$\lambda_i = \lambda = c/f_i. \quad (122)$$

Na slici 31 su prikazani preseci dve ekvifazne sfere promene pritiska (jer se radi o približno tačkom izvoru sfernih talasa) udaljene za jednu talasnu dužinu. Brzina zvuka u odnosu na prijemnik odnosno brzina sa kojom prijemnik prolazi kroz ekvifazne sfere je

$$c_p = c + v_p. \quad (123)$$

Međutim prijemnik koji nailazi na ove ekvifazne sfere "vidi" istu talasnu dužinu,

odosnosno ona ne zavisi od njegove brzine

$$\lambda_p = \lambda_i = \lambda = c_p/f_p = (c + v_p)/f_p, \quad (124)$$

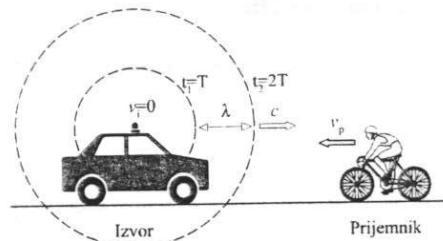
gde je f_p frekvencija koju registruje prijemnik. Iz (122) i (124) sledi

$$c/f_i = (c + v_p)/f_p \rightarrow f_p = f_i(1 + v_p/c). \quad (125)$$

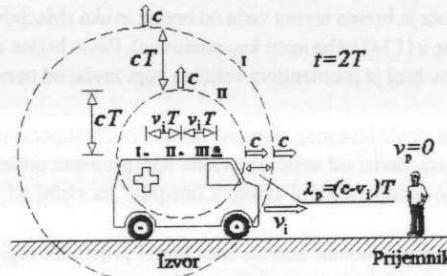
Ako se prijemnik udaljava od izvora u izrazu (125) treba uzeti algebarski znak brzine tj. $v_p < 0$. Uzimajući ovo u obzir sledi

$$f_p = f_i(1 \pm |v_p|/c), \quad (126)$$

gde znak "+" treba uzeti u slučaju kretanja prijemnika prema izvoru a znak "-" u slučaju njegovog udaljavanja od izvora. Relacija (126) važi samo u slučajevima $|v_p| < c$. Ako se npr. prijemnik udaljava od izvora brzinom $v_p > c$ frekvencija koju on registruje prema relaciji (126) postaje negativna. Relacija (126) se ne može koristiti ni za slučaj približavanja posmatrača izvoru ukoliko je $v_p > c$. Naime u tom slučaju se znatno menjaju fizička dešavanja u sredini odnosno generišu se tzv. udarni talasi o kojima će biti reči u sledećem poglavljiju. Dakle fizički model položaja ekvifaznih ravnih koji smo prikazali na slici 31 se mora promeniti.



20.2 Pomena frekvencije usled kretanja zvučnog izvora



Slika 32. Brzina kretanja talasa koju registruje prijemnik pri kretanju izvora ostaje nepromenjena $c_p = c$. Talasna dužina koju "vidi" prijemnik se usled kretanja izvora ka njemu smanjuje $\lambda_p = (c - v_i)T$. Zbog toga se povećava frekvencija koju registruje prijemnik, jer je $f_p = c_p / \lambda_p$.

Brzina kretanja talasa (odносно ravni koje predstavljaju talas) se ne menja u odnosu na prijemnik i iznosi c (za zvuk ne važi zakon sabiranja brzina jer ga prenosi nepokretna sredina), kao što je prikazano na slici 32 pa je

$$c_p = c , \quad (127)$$

gde je c_p brzina talasa koju "vidi" prijemnik. Rastojanje između ekvifaznih ravni predstavlja talasnu dužinu λ_p koju detektuje prijemnik. Pošto se izvor kreće konstantnom brzinom v_i u trenutku $t = 2T$ prikazanom na slici 32 (izvor je na mestu III) talas emitovan iz položaja I je prešao put $s_I = c(2T)$. Talas emitovan iz položaja II prešao put cT , a mereno iz položaja I to rastojanje je uvećano za pređeni put izvora $v_i T$. Ukupno rastojanje na kojem se nalazi ekvifazna ravan II mereno u odnosu na položaj I je $s_{II} = (c + v_i)T$. Razlika ovih rastojanja predstavlja talasnu dužinu λ_p koju detektuje prijemnik (vidi sliku 32)

$$\lambda_p = s_I - s_{II} = (c - v_i)T . \quad (128)$$

Kako je $T = 1/f_i$, a po definiciji je frekvencija koju detektuje prijemnik $f_p = c_p / \lambda_p$ iz (127) i (128) sledi

$$f_p = c_p / \lambda_p = f_i / (1 - v_i/c) . \quad (129)$$

Ako se izvor udaljava od prijemnika u izrazu (129) treba uzeti algebarski znak brzine izvora tj. $v_i < 0$. Uzimajući ovo u obzir sledi

$$f_p = f_i / (1 + |v_i|/c) , \quad (130)$$

gde znak "-" treba uzeti u slučaju kretanja izvora prema prijemniku a znak "+" u slučaju njegovog udaljavanja. Relacija (130) važi samo u slučajevima $|v_i| < c$ odnosno važe iste primedbe koje su

navedene kod analize Dopplerovog efekta usled kretanja prijemnika.

20.3 Pomena frekvencije usled istovremenog kretanja izvora i prijemnika

Ovaj slučaj je kombinacija prethodnih slučajeva. Ukoliko se i izvor i prijemnik kreću menja se i i brzina i talasna dužina zvuka u odnosu na prijemnik. Neka je brzina kretanja izvora v_i , a brzina kretanja prijemnika v_p . Usled kretanja prijemnika prema relaciji (123) se menja brzina kretanja talasa koju "vidi" prijemnik

$$c_p = c \pm |v_p| , \quad (131)$$

gde znak "+" treba uzeti u slučaju kretanja prijemnika prema izvoru a znak "-" u slučaju njegovog udaljavanja od izvora. Takođe usled kretanja izvora prema relaciji (128) se menja talasna dužina talasa koju "vidi" prijemnik

$$\lambda_p = (c \mp |v_i|)/f_i , \quad (132)$$

gde znak "-" treba uzeti u slučaju kretanja izvora prema prijemniku a znak "+" u slučaju njegovog udaljavanja. Iz (131) i (132) sledi izraz za frekvenciju koju detektuje prijemnik

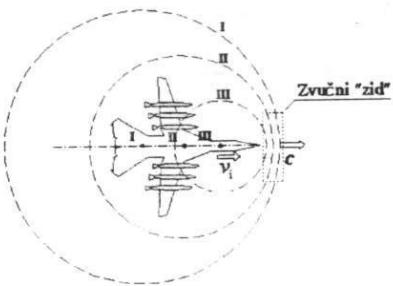
$$f_p = \frac{c_p}{\lambda_p} = f_i \frac{c \pm |v_p|}{c \mp |v_i|} = f_i \frac{1 \pm |v_p|/c}{1 \mp |v_i|/c} . \quad (133)$$

21. Udarni talasi

Kod analize Dopplerovog efekta usled kretanja zvučnog izvora, slika 32 primećuje se da se ekvifazne površi približavaju sa povećanjem brzine izvora v_i . Talasne dužine emitovanih zvučnih talasa na slici 32 se smanjuju i teže nuli za $v_i \rightarrow c$. Šta se dešava sa frekvencijom za brzine $v_i > c$? Ovaj efekat nije proučavan sve dok se nisu razvili mlazni avioni koji su mogli da se kreću brže od brzine zvuka tzv. supersoničnim brzinama. Prvi takav avion bio je supersonični "Bell X-1" američke avijacije koji je 1947.godine prvi probio tzv. zvuci "zid" ostvarujući brzinu od 1.06 Mach.

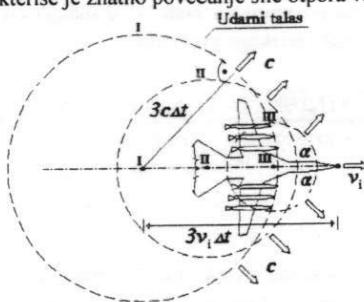
U predhodnim poglavljima analiziran je efekat promene frekvencije zvuka kojeg čuje (ne)pokretni prijemnik, a kojeg emituje (ne)pokretni izvor. Pri tome je pretpostavljen prostoperiodični izvor zvuka. S druge strane **nezavisno od ovog efekta** postoji promena pritiska u fluidu kroz koji se kreće neki objekat. Naime svaki pokretni objekat stvara povećani pritisak ispred sebe (postojanje nadpritiska u fluidu ispred pokretnog objekta može kvalitativno da se pokaže preko Bernoullijeve jednačine). Kada se radi o podzvučnim brzinama ovaj nadpritisak je mali ali se povećava sa povećanjem brzine (približno je proporcionalan sa kvadratom brzine objekta) on postaje dominantan izvor nadpritiska i generator sasvim drugaćijih tzv. udarnih talasa. Oni nisu prostoperiodični talasi nego impulsi.

²³ Površi su sfere pošto je sirena na automobilu približno tačkast izvor, ekvifazne ravni mogu da predstavljaju mesta maksimalne promene pritiska.



Slika 33. Formiranje zvučnog "zida" pri kretanju aviona sa brzinom bliskoj brzini zvuka $v_i - c$. Krugovi predstavljaju sferne površi nadpritisaka I, II i III generisanih kretanjem aviona u jednakim vremenskim intervalima u položajima I, II i III na pravolinjskoj putnici.

zakonu vazduha deluje jednakom povratnom silom koja koči avion. Ova pojava se naziva zvučni "zid" i karakteriše je znatno povećanje sile otpora vazduha na avion²⁴.



Slika 34. Položaji sfernih površi nadpritisaka u trenutku $t_2 = 3\Delta t$ za supersonične brzine aviona $v_i > c$. Sferne površi nadpritisaka emitovane iz položaja II i III u trenucima $t_1 = \Delta t$ i $t_2 = 2\Delta t$, se pomeraju nadesno ispred sferne površi I emitovane u trenutku $t_0 = 0$. Emitovani talasni frontovi nadpritisaka formiraju konus čiji je presek sa ravni crteža trougao sa napadnim uglom α prema pravcu kretanja aviona.

frontovi nadpritisaka velike amplitude na površi konusa formiraju tzv. *udarni talas*. Konus udarnog talasa prati avion pri kretanju pri čemu se ne menja ugao α ukoliko je brzina aviona konstantna. Ovaj ugao se može izračunati iz pravouglog trougla na slici 34 kojeg formiraju poluprečnik kruga udarnog talasa, tangenta na krug i pravac kretanja aviona.

²⁴ Zbog postojanja ove sile i različitog procenjivanja njenog intenziteta postojala su različita mišljenja šta će se desiti sa avionom koji probija zvučni "zid". Spoljni oblik aviona "Bell X-1" je bio nalik puščanom metku za koji se znalo da se pri ispaljivanju kreće supersoničnim brzinama.

$$\sin \alpha = c / v_i = 1/M , \quad M = v_i / c , \quad (134)$$

gde je M Machov broj koji određuje koliko puta je brzina izvora veća od brzine zvuka (Machov broj je po definiciji pozitivna veličina, pa obe brzine u (134) treba uzeti kao pozitivne). Pošto brzine zvuka zavisi od pritiska vazduha tj. od visine, Machov broj je promenljiva veličina koja zavisi od trenutnog položaja aviona.

Udarni talas se čuje kao jaka eksplozija posle izvesnog vremena nakon preleta supersoničnog aviona iznad posmatrača. Jačina udarnog talasa zavisi od veličine aviona npr. promena pritiska na površi zemlje usled udarnog talasa kojeg izazove supersonični avion "Concorde" na visini od 12km iznosi oko 20 Pa .

Ispred konusa udarnog talasa nema zvuka, a unutar konusa nepokretni prijemnik registruje Doppler-ovu promenu frekvencije zvuka motora aviona koji se udaljava.

Treba napomenuti još jednom da bilo koji objekat koji se kreće supersoničnom brzinom za dati fluid generiše kontinualno udarni talas, a ne samo u trenutku probijanja zvučnog zida. Stvaranje udarnog talasa je prouzrokovano kretanjem objekta a ne zvukom kojeg on emituje (npr. usled rada motora). Supersonični avioni mogu imati veoma bučne motore ali one ne stvaraju udarni talas. Npr. svemirski brod "Space shuttle" stvara veoma snašan udarni talas pri sletanju na Zemlju, a u fazi sletanja njegovi motori su ugašeni jer je gorivo potrošeno pri lansiraju i manevriranju u orbiti.

Efekat stvaranja udarnog talasa je ograničio upotrebu supersoničnog putničkog aviona "Concorde" koji se morao kretati podzvučnim brzinama iznad kopna, a nadzvučnim samo iznad okeana. To je znatno umanjilo njegovu prosečnu brzinu i praktično ga učinilo nerentabilnim pa je povučen je iz komercijalne upotrebe.

Udarne talase stvaraju i drugi objekti koji se kreću supersoničnom brzinom za dati fluid. Npr. zvuk pucnja pri pucanju iz vatre nog oružja je velikim delom posledica udarnog talasa kojeg stvara metak koji se kreće supersoničnom brzinom na izlazu iz cevi, a manjim delom posledica naglog širenja barutnih gasova. Takođe zvuk pucnja biće je posledica udarnog talasa kojeg stvara vrh biće krećući se supersoničnom brzinom. Svaki plovni objekat koji se po vodi kreće brzinom većom od nekoliko metara u sekundi kreće se "supersoničnom" brzinom za talase na površi vode pa ostavlja trag (u obliku trougla) sličan onom na slici 34.