

# ISPIT IZ FIZIKE 1

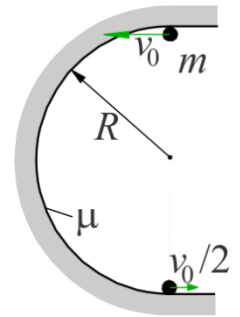
Februarski ispitni rok

(Ispit traje 3 sata)

ETF, Beograd, 12. 02. 2019.

1. [100] U početnom trenutku prvi kamen se baci vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$  sa površine Zemlje. Nakon kog vremena  $\tau$  od bacanja prvog kamena treba baciti drugi kamen iz iste tačke vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0/2$  da bi se oni susreli (sudarili) za najkraće vreme mereno od početnog trenutka? Na kojoj visini će se kamenovi susresti? Zanemariti otpor vazduha.

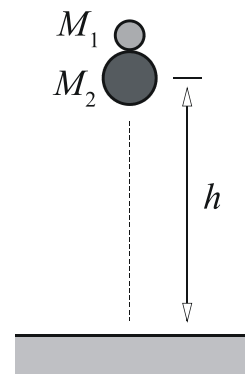
2. (a) [30] Izvesti izraz za perifernu brzinu i periferno ubrzanje materijalne tačke. Poznati su vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja,  $\vec{\omega}$  i  $\vec{\alpha}$ , respektivno, kao i vektor položaja materijalne tačke u odnosu na centar krivine trajektorije  $\vec{R}$ .



- (b) [70] Hokejaški pak mase  $m$  kreće se uz hrapavu ogradu terena po idealno glatkoj površi leda (videti sliku uz zadatak). Intenzitet brzine paka na jednom kraju polukružnog dela ograde poluprečnika  $R$  je  $v_0$ , a na drugom kraju ovog polukružnog dela ograde intenzitet brzine je jednak  $v_0/2$  (videti sliku uz zadatak). Odrediti vrednost koeficijent trenja između paka i ograde  $\mu$ . Pak smatrati materijalnom tačkom.

Slika uz zadatak 2.

3. Dve kuglice masa  $M_1 = m$  i  $M_2 = 2m$ , postavljene su jedna na drugu na visini  $h$  i puštene da slobodno padaju (videti sliku uz zadatak). Kuglice su zanemarljivih poluprečnika ( $r \ll h$ ) i pri udaru o podlogu se odbijaju vertikalno uvis pri čemu su svi sudari elastični.



Slika uz zadatak 3.

- (a) [60] Napisati jednačine održanja impulsa i energije pri udaru kuglica o podlogu;  
(b) [40] Odrediti do koje maksimalne visine će da odskoči kuglica mase  $M_1$ .

*Uputstvo: Interakcija kuglice  $M_2$  i podloge je prvi sudar, a interakcija kuglica  $M_1$  i  $M_2$  koja sledi je drugi sudar. Smatrati da je podloga beskonačne mase. Brzine posle prvog sudara označiti sa ' (prim), a posle drugog sudara sa '' (sekundum) u natpisu.*

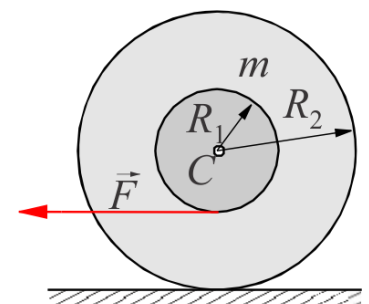
4. (a) [30] Kruto telo rotira oko nepokretne  $z$  ose ugaonom brzinom  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  ( $\vec{e}_z$  je jedinični vektor  $z$  ose). Izvesti izraz za snagu rezultatnog eksternog momenta sile  $\vec{M}_O$  koji deluje na telo pri ovom kretanju (momentna tačka je postavljena na osu rotacije).

- (b) Kotur mase  $m$ , na koji je namotan konac, kotrlja se bez proklizavanja po ravnoj horizontalnoj podlozi povlačenjem konca horizontalnom silom intenziteta  $F$  (videti sliku uz zadatak). Poznata je masa kotura  $m$ , poluprečnik osovine kotura na koju je namotan konac  $R_1$ , poluprečnik točkova kotura koji su u dodiru sa podlogom  $R_2=2R_1$ , moment inercije kotura u odnosu na osu rotacije kroz centar mase kotura (tačka  $C$ )  $I=3mR_1^2$ . Masa konca je zanemarljivo mala. Odrediti:

- (b1) [40] intenzitet, pravac i smer vektora ubrzanja centra mase kotura  $a_C$ ;

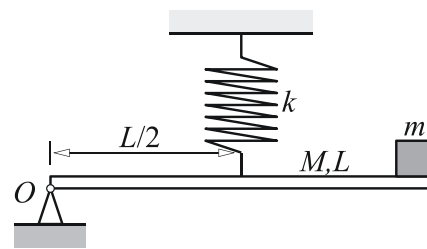
- (b2) [20] intenzitet, pravac i smer sile trenja  $F_{tr}$ ;

- (b3) [10] minimalnu vrednost koeficijenta trenja  $\mu_{min}$  između kotura i horizontalne podloge tako da se kotur kotrlja bez proklizavanja.



Slika uz zadatak 4.

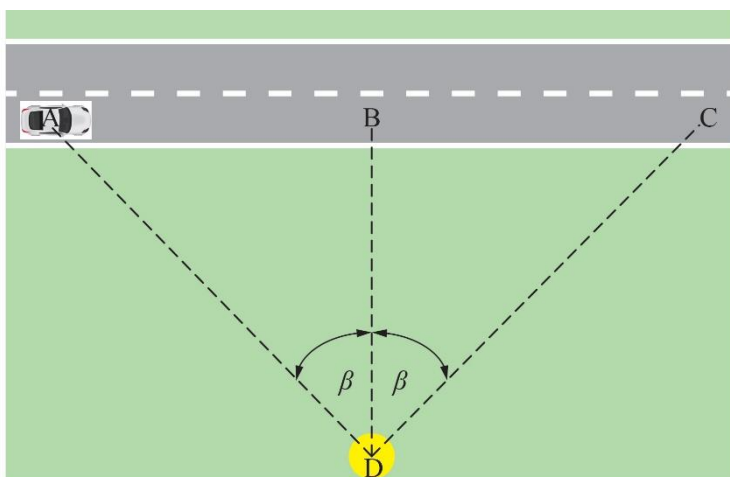
5. Homogeni štap mase  $M = 3m$  i dužine  $L$  je jednim svojim krajem zakačen za zglob  $O$  oko kojeg može da se okreće bez trenja. Štap je postavljen u horizontalan položaj tako što je na sredini učvršćena vertikalna opruga konstante krutosti  $k$  koja je gornjim krajem učvršćena za nepokretni plafon, a na slobodnom kraju štapa je postavljen mali teg mase  $m$  (videti sliku uz zadatak). Ako se štap izvede iz ravnotežnog položaja (npr. kratkotrajnim delovanjem vertikalne sile naniže na masu  $m$ ) i pusti da se kreće u vertikalnoj ravni izračunati period malih oscilacija sistema.



Slika uz zadatak 5.

6. (a) [70] (*Doplerov efekat*) Detaljno objasniti i izvesti izraz za frekvenciju  $f'$  koju registruje detektor, a koja je izmenjena u odnosu na frekvenciju izvora  $f$  usled relativnog kretanja izvora i detektora. Razmotriti slučaj kada se kreće samo izvor, samo detektor i kada se kreću i izvor i detektor. (Napomena: Na početku izvođenja definisati korišćene oznake i nacrtati skicu koja objašnjava razmatrani efekat).

- (b) [30] Na relativno velikom normalnom rastojanju  $DB$  od sredine trake po kojoj se kreće automobil nalazi se detektor zvuka  $D$ . Automobil se kreće od tačke  $A$  do  $C$  konstantnom brzinom  $v = 20$  m/s pri čemu vozač drži pritisnutu sirenu čija je učestanost  $f = 1$  kHz. Izračunati frekvenciju koju registruje detektor  $D$  detekcijom talasa formiranog u trenutku kada automobil prolazi kroz tačke  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Poznato je da ugao između  $DA$  ( $DC$ ) i normale na put  $DB$  iznosi  $\beta = 45^\circ$ . Smatrati da je intenzitet zvuka dovoljno visok da ga detektor može registrovati, da nema vetra i da je brzina zvuka u vazduhu  $c = 340$  m/s. Automobil posmatrati kao materijalnu tačku, a sirenu kao izotropan tačkasti izvor.



Slika uz zadatak 6.

*Opšte napomene:*

1) Na vrhu naslovne strane vežbanke napisati **oznaku grupe i ime predmetnog nastavnika** kod koga ste zvanično raspoređeni da slušate predavanja:

**J. Cvetić (P1), V. Arsoski (P2) i M. Tadić (P3).**

2) **Studenti koji su zadovoljni poenima ostvarenim na kolokvijumu u tekućoj školskoj godini rade ZADATKE 3-6 za vreme 3 h. Na naslovnoj strani vežbanke, u polju rednih brojeva 1 i 2, treba da upišu oznaku K1 da bi poeni ostvareni na kolokvijumu bili priznati.**

3) **Studenti koji nisu radili kolokvijum ili koji nisu zadovoljni poenima ostvarenim na kolokvijumu u tekućoj školskoj godini rade SVE ZADATKE (1-6) za vreme 3 h.**

4) *Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati jasno označiti na koricama sveske (u odgovarajućoj rubrici) oznakom X.*

5) Na koricama vežbanke (u gornjem desnom uglu) treba napisati broj poena sa prijemnog ispita iz fizike (ako je rađen 2018. godine), u formi PR-ISP = ... poena. Ako nije rađen, napisati PR-ISP = NE. Ako znate da ste imali poene iz fizike na prijemnom, ali niste sigurni tačno koliko, napisati PR-ISP = ?

6) *Dozvoljena je upotreba neprogramibilnih kalkulatora i grafitne olovke.*

7) **List sa tekstom zadataka poneti sa sobom, ne ostavljati list u vežbanci.**

8) Ispit se može napustiti po isteku **najmanje jednog sata** od početka ispita.

**Rešenja zadatka, Fizika 1,  
ETF, Beograd  
februarski ispitni rok 2019.**

1. Jednačine kretanja za prvi i drugi kamen su:

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$
$$y_2(t) = \frac{v_0}{2}(t - \tau) - \frac{g(t - \tau)^2}{2}.$$

Kamenovi će se susresti u trenutku  $t_s$  ako je  $y_1(t_s) = y_2(t_s)$ , odakle se dobija:

$$t_s = \frac{v_0 \tau + g\tau^2}{2g\tau - v_0}.$$

Polazeći od uslova za minimum  $dt_s/d\tau = 0$ , dobija se kvadratna jednačina:

$$\tau^2 - \frac{v_0}{g}\tau - \frac{v_0^2}{2g} = 0,$$

gde pozitivno rešenje daje traženi trenutak:

$$\tau = \frac{(\sqrt{3} + 1)v_0}{2g},$$

za koji je minimalno vreme:

$$t_{s,\min} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 v_0}{4g},$$

a visina na kojoj se kamenovi susretnu:

$$h = y_1(t_{s,\min}) = \frac{v_0^2}{8g}.$$

2. (a) Videti predavanja 2018/19 i skripte.

(b) Zadatak se može rešiti u prirodnim koordinatama:

$$ma_t = m\dot{v} = -F_{tr},$$
$$ma_n = \frac{mv^2}{R} = N.$$

Koristeći  $F_{tr} = \mu N$ , dobija se:

$$m\dot{v} = -\frac{\mu mv^2}{R}.$$

Razdvajanjem promenljivih:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t \frac{\mu}{R} dt.$$

Odavde sledi:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t}.$$

Odavde se lako odredi vremenski trenutak u kome pak izlazi iz polukružnog dela ograde:

$$\frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t_1}.$$

Odavde sledi:

$$t_1 = \frac{R}{\mu v_0}.$$

Koristeći  $v = ds/dt$ , druga integracija:

$$\int_0^s ds = v_0 \int_0^t \frac{dt}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t}.$$

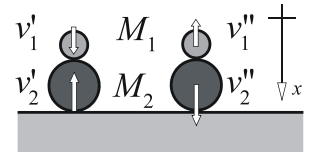
Odavde sledi:

$$s(t) = \frac{R}{\mu} \ln \left( 1 + \frac{\mu v_0}{R} t \right).$$

Zamenom  $s(t_1) = \pi R$  i vrednosti za  $t_1$  u poslednji izraz sledi:

$$\mu = \frac{\ln 2}{\pi} = 0,22.$$

3. (a) Uzimajući referentni smer  $x$ -ose naniže, brzina kretanja obe kuglice u trenutku dodira podloge je  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Posle prvog sudara kuglica  $M_2$  stiće brzinu



$$v_2' = -v_0, \quad (1)$$

jer se sudara sa podlogom beskonačne mase. Pretpostavljajući da se posle drugog sudara kuglica  $M_1$  odbije naviše brzinom  $v_1''$ , a kuglica  $M_2$  odbije naniže brzinom  $v_2''$  (ova pretpostavka nije neophodna da bi se zadatak rešio, ali olakšava izvođenja), zakon održanja impulsa pri drugom sudaru (između kuglica  $M_1$  i  $M_2$ ) glasi

$$M_1 v_1' + M_2 v_2' = M_1 (-v_1'') + M_2 v_2'', \quad (2)$$

gde je  $v_1' = v_0$  brzina kuglice mase  $M_1$  pre sudara sa kuglicom mase  $M_2$ . Iz (2) i (1) sledi

$$mv_0 + 2m(-v_0) = m(-v_1'') + 2mv_2'', \rightarrow -v_0 = 2v_2'' - v_1''. \quad (3)$$

Zakon održanja energije pri drugom sudaru (između kuglica  $M_1$  i  $M_2$ ) glasi

$$\frac{1}{2} M_1 v_0^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_2')^2 = \frac{1}{2} M_1 (v_1'')^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_2'')^2. \quad (4)$$

Iz (4) sledi

$$\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} 2mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_1''^2 + \frac{1}{2} 2mv_2''^2, \rightarrow 3v_0^2 = 2v_2''^2 + v_1''^2, \quad (5)$$

Eliminacijom  $v_2''$  iz (5) i (3) sledi

$$3v_1''^2 - 2v_0 v_1'' - 5v_0^2 = 0, \rightarrow v_1'' = \frac{5}{3} v_0, -v_0. \quad (6)$$

Dobijaju se dva rešenja za brzinu pri čemu je drugo rešenje u (6) ustvari početna brzina kuglice  $M_1$  (pretpostavljeni smer kretanja kuglice  $M_1$  posle drugog sudara je bio naviše).

- (b) Iz zakona o održanju ukupne mehaničke energije sledi da je maksimalna visina do koje će da se odbije kuglica  $M_1$

$$mgh'' = \frac{1}{2} mv_1''^2, \rightarrow h'' = \frac{25}{9} h.$$

4. (a) Videti predavanja 2018/19 i skripte.  
(b1) Jednačine kretanja su:

$$ma_c = -F + F_{tr},$$

$$0 = N - mg,$$

$$I\alpha = R_1 F - R_2 F_{tr}.$$

Ovde je pretpostavljeno da su vektori ubrzanja centra mase kotura i sile trenja usmereni udesno, suprotno od smera sile  $F$ . Koristeći uslov za kotrljanje bez proklizavanja  $a_c = R_2 \alpha$ , sledi:

$$a_c = -\frac{2F}{7m}.$$

Dakle, smer vektora ubrzanja je suprotan od pretpostavljenog, tj. ima isti smer kao sila  $F$ .

- (b2) Sila trenja je:

$$F_{tr} = \frac{5F}{7} > 0$$

i, dakle, usmerena je kako je pretpostavljeno (suprotno od sile  $F$ ).

(b3) Uslov za statičko trenje je:

$$F_{tr} = \frac{5F}{7} \leq \mu_s mg,$$

gde je  $\mu_s$  koeficijent statičkog trenja. Minimalna vrednost koeficijenta statičkog trenja je prema tome:

$$\mu_{\min} = \frac{5F}{7mg}.$$

5. Moment inercije sistema oko zgloba  $O$  je

$$I_O = ML^2/3 + mL^2 = 2mL^2. \quad (1)$$

Momentna jednačina kretanja sistema oko zgloba  $O$  glasi

$$M_O = -kxL/2, \quad x = \theta L/2. \quad (2)$$

Kako je  $M_O = I_O d^2\theta/dt^2$  iz (1) i (2) sledi diferencijalna jednačina kretanja i period oscilovanja sistema

$$d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/(8m)}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{8m/k}.$$

6. (a) Videti predavanja 2018/19 i skripte.

(b) Detektor miruje, dok se izvor (automobil) kreće.

Kada je automobil u tački A, brzina kojom se on približava detektoru je određena projekcijom brzine automobila na pravac AD:

$$v_A = v \cos \beta,$$

u tački B brzina automobila je normalna na pravac DB pa je  $v_B = 0$ , dok se u tački C automobil udaljava od detektora brzinom:

$$v_C = v \cos \beta.$$

Za slučaj kada se samo izvor kreće relativnom brzinom  $v_I$  (duž pravca koji spaja izvor i detektor):

$$f' = f \frac{1}{1 \mp \frac{v_I}{c}},$$

gde je gornji (donji) znak za slučaj kada se izvor približava detektoru (udaljava od detektora).

Dobija se  $f_A = \frac{f}{1 - \cos \beta \cdot \frac{v}{c}} = 1043 \text{ Hz}$ ,  $f_B = f = 1000 \text{ Hz}$  i  $f_C = \frac{f}{1 + \cos \beta \cdot \frac{v}{c}} = 960 \text{ Hz}$ .

Predmetni nastavnici

P1-J. Cvetić, P2-V. Arsoški, P3-M. Tadić.