ISPIT IZ FIZIKE 1

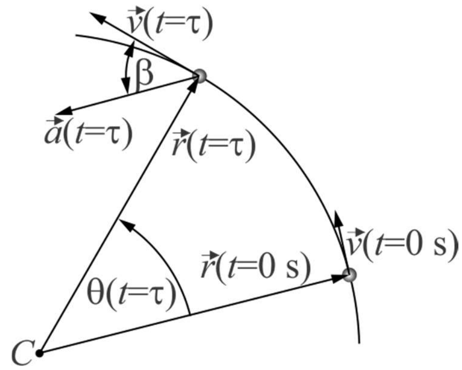
Februarski ispitni rok ETF, Beograd, 23.02.2021.

1. Čestica se kreće po kružnoj trajektoriji, sa centrom u tački C (videti sliku uz zadatak), tako da je algebarska vrednost intenziteta ugaonog ubrzanja α eksponencijalna funkcija vremena t, $\alpha(t) = \alpha_0 e^{kt}$, gde su α_0 i k pozitivne konstante. Algebarska vrednost intenziteta ugaone brzine i vrednost ugla rotacije čestice u početnom trenutku $t = 0\,\mathrm{s}$ su: $\omega(t = 0\,\mathrm{s}) = \alpha_0/k$ i $\theta(t = 0\,\mathrm{s}) = 0$ rad. Za dato α_0 i k, odrediti:

(a) [50] vremenski trenutak $t = \tau$ u kojem vektor ukupnog ubrzanja čestice $\vec{a}$ zaklapa ugao $\beta = \pi/4$ rad sa vektorom periferne brzine $\vec{v}$;

(b) [20] algebarsku vrednost intenziteta ugaone brzine čestice u vremenskom trenutku $t = \tau$, $\omega(t = \tau)$;

(c) [30] vrednost ugla rotacije čestice u vremenskom trenutku $t = \tau$, $\theta(t = \tau)$.



Slika uz zadatak 1.

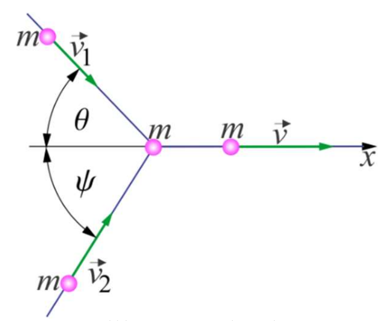
2. Kuglica poluprečnika r i gustine ρ pusti se bez početne brzine da tone u tečnosti gustine $\rho_0 < \rho$, pri čemu je u početnom trenutku kuglica u potpunosti potopljena u tečnost. Pri kretanju kroz tečnost na kuglicu, pored gravitacione sile i sile potiska, deluje i sila otpora koja se može predstaviti Stoksovim zakonom $\vec{F}_{otp} = -6\pi\eta r\vec{v}$, gde je η koeficijent viskoznog trenja, a $\vec{v}$ vektor brzine (centra mase) kuglice. Za poznato ρ, ρ_0, r, η i gravitaciono ubrzanje g, odrediti:

(a) [30] asimptotsku brzinu kuglice v_∞ i

(b) [70] vreme τ za koje kuglica dostigne brzinu $v(\tau) = v_\infty/2$.

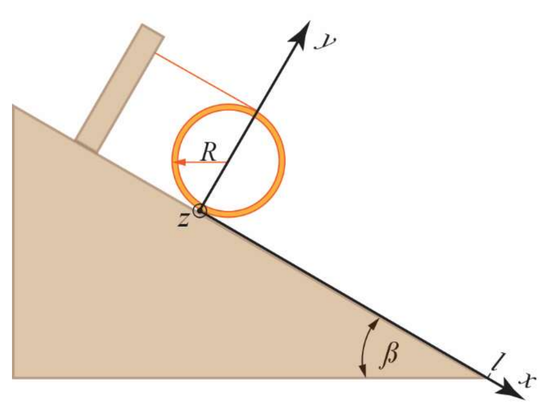
---

3. [100] Dve čestice jednakih masa ($m_1 = m_2 = m$) i brzina intenziteta v_1 i v_2 elastično se sudaraju tako da se posle sudara prva čestica zaustavi, dok druga nastavi da se kreće brzinom intenziteta $v = 2v_1/\sqrt{3}$ duž x ose (videti sliku uz zadatak). Odrediti uglove θ i ψ koje vektori brzina dve čestice pre sudara, $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, respektivno, zaklapaju sa x osom (videti sliku). *Napomena*: Sve brzine su određene u odnosu na laboratoriju u kojoj se izvodi eksperiment sudara dve čestice.



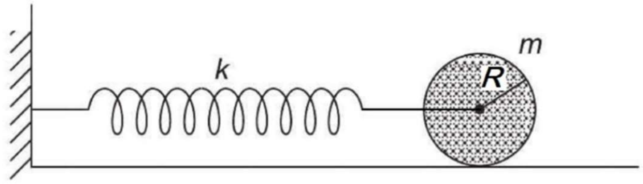
Slika uz zadatak 3.

4. [100] Na cilindar tankih zidova, koji leži na strmoj ravni nagibnog ugla β, namotana je tanka neistegljiva nit zanemarljive mase koja je jednim svojim krajem pričvršćena za nepomičan zid koji je normalan na površinu strme ravni (videti sliku). Koeficijent trenja između strme ravni i cilindra je μ. Ako je u početnom trenutku cilindar mirovao, odrediti njegovu brzinu na dnu strme ravni (kad pređe put l). *Napomena*: Pri kretanju cilindar proklizava, pri čemu je u svakom trenutku nit paralelna strmoj ravni. Poznato je gravitaciono ubrzanje g.



Slika uz zadatak 4.

5. [100] Horizontalna opruga zanemarljive mase, konstante krutosti k, je levim krajem zakačena za vertikalni zid, a desnim krajem za centar homogenog valjka mase m poluprečnika R. Valjak se izvede iz ravnotežnog položaja malim horizontalnim pomeranjem na jednu stranu i pusti da osciluje u ravni crteža. Ako u tački kontakta valjka i podloge nema proklizavanja, odrediti period oscilacija valjka.



Slika uz zadatak 5.

6. (a) [30] (***Teorijsko pitanje***.) Izvesti izraz za talasnu funkciju stojećeg transverzalnog talasa na zategnutoj žici dužine L učvršćenoj na oba kraja za nepokretne masivne oslonce. Poznata je amplituda y_{max}, kružna učestanost ω i talasni broj k ulaznog (incidentnog) talasa koji se prostire u smeru x ose.

(***Zadatak***.) Talasna funkcija stojećeg transverzalnog talasa na zategnutoj žici učvršćenoj na oba kraja je data izrazom

$$y(x,t) = -Y_0 \sin(kx) \cos(\omega t),$$

gde je $Y_0 = 0{,}06$ m, $k = 2\pi/3 \text{ m}^{-1}$ i $\omega = 120\pi \text{ s}^{-1}$. Dužina žice je 1,5 m, a njena masa 30 g.

(b) [50] Napišite jednačine upadnog i reflektovanog talasa čija superpozicija daje gornju jednačinu. Kolika je talasna dužina, frekvencija i brzina svakog od talasa?

(c) [10] Koji mod oscilovanja stojećeg talasa je ostvaren?

(d) [10] Izračunati silu zatezanja žice.

Opšte napomene:

1) *Na vrhu naslovne strane vežbanke napisati* ***oznaku grupe*** *i* ***ime predmetnog nastavnika*** *kod koga ste zvanično raspoređeni da slušate predavanja:*

J. Cvetić (P1), V. Arsoski (P2) i M. Tadić (P3).

2) **Studenti trebaju da u gornjem levom uglu vežbanke zabeleže šta rade. Ukoliko rade samo prvi kolokvijum u gornjem levom uglu na koricama vežbanke treba da napišu K1 i za njih ispit traje 2 sata. Dežurni nastavnik će obavestiti studente da predaju vežbanke nakon predviđenog vremena. Ukoliko student ne preda vežbanku, pri pregledanju će mu se računati kao da je radio integralni ispit.**

3) **Studenti koji rade samo drugi kolokvijum u gornjem levom uglu na koricama vežbanke treba da napišu K2 i rade ZADATKE 3-6 za vreme 3 h. Student koji je radio K1 treba na koricama vežbanke u kućice ispod brojeva zadataka 1 i 2 da upiše K1 (kako bi im se računali poeni sa prvog kolokvijuma).**

4) **Studenti koji polažu integralni ispit rade SVE ZADATKE (1-6) za vreme 3 h. Studentima koji nisu ništa napisali u gornjem levom uglu na koricama vežbanke ispit se pregleda kao integralni. Ukoliko je student radio integralni ispit, ne može mu se parcijalno priznati prvi ili drugi deo!**

5) *Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati jasno označiti na koricama sveske (u odgovarajućoj rubrici) oznakom X.*

6) Na koricama vežbanke (u gornjem desnom uglu) treba napisati broj poena sa prijemnog ispita iz fizike (ako je rađen 2020. godine), u formi PR-ISP = ... poena. Ako nije rađen, napisati PR-ISP = NE. Ako znate da ste imali poene iz fizike na prijemnom, ali niste sigurni tačno koliko, napisati PR-ISP = ? Ukoliko student ne stavi nikakvu oznaku za prijemni ispit, poeni sa prijemnog ispita mu se neće uzeti u obzir.

7) *Dozvoljena je upotreba neprogramibilnih kalkulatora i grafitne olovke.*

8) **List sa tekstom zadataka poneti sa sobom, ne ostavljati list u vežbanci.**

9) Ispit se može napustiti po isteku **najmanje jednog sata** od početka ispita.

Rešenja zadataka, Fizika 1, ETF, Beograd
Februarski ispitni rok 2021.

1. (a) Na osnovu:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

i date zavisnosti $\alpha(t)$ sledi:

$$d\omega = \alpha_0 e^{kt} dt.$$

Integracija daje:

$$\omega(t) - \omega(t=0) = \frac{\alpha_0}{k}(e^{kt} - 1).$$

Zamenom vrednosti $\omega(t=0) = \alpha_0/k$, sledi:

$$\omega(t) = \frac{\alpha_0}{k} e^{kt}.$$

Dati uslov $\beta = \pi/4$ znači da $a_\tau(t=\tau) = a_n(t=\tau)$, odnosno:

$$R\omega^2(t=\tau) = R\alpha(t=\tau).$$

Sledi:

$$e^{k\tau} = \frac{k^2}{\alpha_0},$$

odakle:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{k}\ln\frac{k^2}{\alpha_0}}.$$

(b) Zamenom dobijenog izraza za τ u izraza za $\omega(t)$, sledi:

$$\boxed{\omega(t=\tau) = k}.$$

(c) Koristimo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Za izvedeno $\omega(t)$, sledi:

$$d\theta = \frac{\alpha_0}{k} e^{kt} dt.$$

Uz poočetni uslov $\theta(t=0) = 0$ rad, integracija daje:

$$\boxed{\theta(t=\tau) = 1 - \frac{\alpha_0}{k^2}}.$$

2. (a) Za koordinatnu osu usmerenu vertikalno naniže, jednačina kretanja kuglice je:

$$ma = mg - F_{pot} - F_{otp} = \rho V g - \rho_0 V g - 6\pi\eta r v, \qquad (1)$$

gde je zapremina kuglice $V = 4\pi r^3/3$. Zamenom $a = 0$ u jednačinu (1) dobija se asimptotska brzina:

$$v_\infty = \frac{(\rho - \rho_0)Vg}{6\pi\eta r} = \frac{2(\rho - \rho_0)r^2 g}{9\eta}. \qquad (2)$$

(b) Koristeći se jednačinama (1) i (2) jednačina kretanja je:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho r^2}(v - v_\infty). \qquad (3)$$

Integracijom prethodne jednačine:

$$\int_0^{v_\infty/2} \frac{dv}{v - v_\infty} = -\frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho r^2}\int_0^\tau dt,$$

dobija se :

$$\tau = \frac{2\ln 2\,\rho r^2}{9\eta}.$$

3. Na osnovu zakona o održanju impulsa sledi:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Koristeći kosinusnu teoremu za trougao koga formiraju vektori $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ i $\vec{p}$:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(\pi - \theta - \psi).$$

Na osnovu zakona o održanju mehaničke energije sledi:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

Iz poslednja dva izraza dobija se:

$$\theta + \psi = \frac{\pi}{2}.$$

Odavde sledi:

$$\sin^2\theta = \cos^2\psi = 1 - \sin^2\psi.$$

Takođe, na osnovu zakona o održanju mehaničke energije sledi:

$$v^2 = \frac{4}{3}v_1^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Odavde:

$$v_2 = v_1/\sqrt{3}.$$

Vertikalne projekcije impulsa (vektora brzine) su jednake:

$$v_1\sin\theta = v_2\sin\psi.$$

Sledi:

$$\sin^2\theta = \sin^2\psi/3.$$

Dakle:

$$\frac{1}{3}\sin^2\psi = 1 - \sin^2\psi.$$

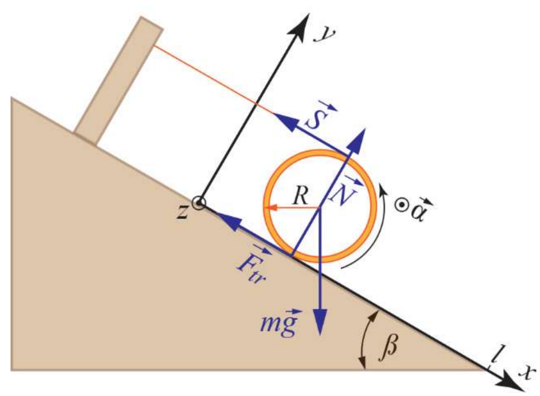
Ugao ψ je:

$$\boxed{\psi = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{rad}}.$$

Ugao θ je:

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad}}.$$

4. Za koordinatni sistem sa slike jednačine za translaciju centra mase cilindra su:



$$ma_x = mg\sin\beta - S - F_{tr},$$
$$ma_y = 0 = N - mg\cos\beta,$$

gde cilindar proklizava tako da je $F_{tr} = \mu N = \mu mg\cos\beta$. Jednačina za rotaciju cilindra je (nit se odmotava bez proklizavanja):

$$I\alpha = I\ddot{\theta} = (S - F_{tr})R,$$

gde je $I = mR^2$ i $\alpha = a_x/R$ (dužina odmotane niti je jednaka pređenom putu), odakle sledi:

$$ma_x = S - F_{tr} = S - \mu mg\cos\beta.$$

Zamenom u prvu jednačinu dobija se:

$$S = \frac{mg\sin\beta}{2},$$

odnosno

$$a_x = g\left(\frac{\sin\beta}{2} - \mu\cos\beta\right).$$

Kako je a_x konstantno i telo počinje da proklizava bez početne brzine:

$$v(l) = \sqrt{2a_xl} = \sqrt{gl(\sin\beta - 2\mu\cos\beta)}.$$

5. (***I rešenje.***) Postavimo x osu horizontalno sa pozitivnim referentnim smerom udesno. Jednačine kretanja po teoremi o kretanju centra mase je:

$$ma_C = -kx - F_{tr},$$

gde je pretpostavljeno da je sila trenja suprotno usmerena od x ose (x je istezanje opruge, odnosno x koordinata centra mase valjka u odnosu na položaj kada je opruga neistegnuta). Momentna jednačina u odnosu na centar valjka je:

$$I_C \alpha = F_{tr} R,$$

gde je I_C moment inercije valjka u odnosu na osu rotacije kroz centar valjka. Koristeći uslov za kotrljanje bez proklizavanja, $a_C = R\alpha$ i $I_C = mR^2/2$, dobija se:

$$F_{tr} = \frac{ma_C}{2}.$$

Dobijeni rezultat $F_{tr} > 0$ znači da je pretpostavka o smeru sile trenja bila dobra. Zamenom u jednačinu kretanja centra mase valjka, sledi:

$$\frac{3}{2} ma_C = -kx.$$

S obzirom da je $a_C = \ddot{x}$, sledi:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0.$$

Period oscilovanja je:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

(***II rešenje.***) Zadatak se može jednostavnije rešiti ako se umesto momentne tačke u centru mase koristi trenutni pol rotacije. Momentna jednačina oko trenutnog pola je:

$$M_{TP} = -FR = I_{TP} \ddot{\theta}, \tag{1}$$

gde je $F = kx$, $x = \theta R$ i $I_{TP} = (3/2)mR^2$. Iz (1) sledi:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

ili

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

gde je:

$$\omega^2 = \frac{2k}{3m}.$$

Odavde:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

6. (a) Videti beleške sa predavanja 2020/21.
(b) Na osnovu teorijske analize pod (a) jednačina stojećeg talasa na žici učvršćenoj na oba kraja se može napisati u obliku

$$y = y_i + y_r = -2 y_{\max} \sin(kx) \cos(\omega t) \ , \tag{1}$$

gde su ulazni (inicijalni) i reflektovani talas

$$y_i = y_{\max} \sin(\omega t - kx), \ \ y_r = -y_{\max} \sin(\omega t + kx)$$

Poređenjem (1) sa jednačinom iz teksta zadatka dobija se $y_{\max} = 0{,}03\,\mathrm{m}$, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/3\,\mathrm{m}^{-1}$ i $\omega = 2\pi f = 120\pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Sledi $\lambda = 3\,\mathrm{m}$ i $f = 60\,\mathrm{Hz}$. Brzina upadnog i reflektovanog talasa je $v = \omega / k = 180\,\mathrm{m/s}$.
(c) Ostvaren je osnovni mod oscilovanja $L = \lambda/2$.
(d) Sila zatezanja žice je $F = v^2 m / L = 648\,\mathrm{N}$.

Predmetni nastavnici