ISPIT IZ FIZIKE 1

Januarski ispitni rok

(Ispit traje 3 sata) ETF, Beograd, 11.1.2024.

1. (a) **(*Teorijsko pitanje*)** Za kretanje materijalne tačke u ravni, u polarnom koordinatnom sistemu izvesti izraze za:

(a1) [20] vektor brzine;

(a2) [30] vektor ubrzanja.

(b) **(*Zadatak*)** Materijalna tačka se kreće u ravni tako da su u polarnom koordinatnom sistemu (sistem koordinata ρ i φ) poznati radijalna projekcija vektora brzine $v_\rho = u$, $u = const > 0$ i radijalna projekcija vektora ubrzanja $a_\rho = -w$, $w = const > 0$. Za početne uslove $\rho(t = 0) = 0$ i $\varphi(t = 0) = 0$ i uslov $\varphi(t) \geq 0$, odrediti:

(b1) [10] parametarsku jednačinu kretanja $\rho(t)$;
(b2) [10] zavisnost cirkularne projekcije vektora brzine od vremena, $v_\varphi(t)$;
(b3) [10] parametarsku jednačinu kretanja $\varphi(t)$;
(b4) [20] zavisnost cirkularne projekcije vektora ubrzanja od vremena, $a_\varphi(t)$.

2. Čamac mase m sa motornim pogonom iz stanja mirovanja počne da se kreće po pravolinijskoj putanji po mirnoj površi jezera. Motor daje konstantnu pogonsku horizontalnu silu intenziteta F_p nezavisno od brzine čamca. Čamac povećava brzinu i kada dostigne polovinu svoje granične (asimptotske) brzine, čamdžija naglo okrene motorni pogon unazad da bi zaustavio čamac (na čamac počne da deluje konstantna horizontalna sila intenziteta F_p suprotna vektoru njegove brzine). Ako na čamac pri kretanju stalno deluje i sila otpora sredine proporcionalna brzini čamca $\vec{F}_{otp} = -b\vec{v}$, gde je faktor proporcionalnosti $b > 0$, odrediti:

(a) [40] vreme τ_1 potrebno da čamac dostigne polovinu granične brzine;

(b) [40] vreme τ_2 potrebno da se čamac zaustavi računajući od trenutka okretanja motornog pogona unazad;

(c) [20] količnik τ_1/τ_2 i objasniti zašto se ova vremena razlikuju.

---

3. (a) [50] **(*Teorijsko pitanje*)** Formulisati i dokazati teoremu o kretanju centra mase mehaničkog sistema.

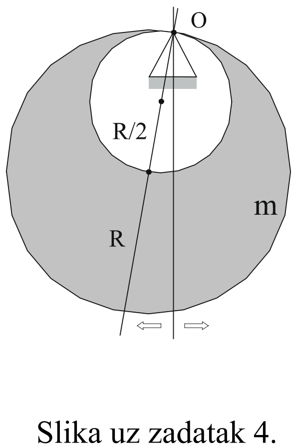
(b) [50] **(*Zadatak*)** U jednom eksperimentu sudaraju se dve čestice masa m i ξm, pri čemu se pre sudara čestice kreću duž istog pravca u istom smeru brzinama intenziteta v i αv, respektivno (koeficijenti α i ξ su pozitivne konstante i važi $\alpha < 1$). Ovaj mehanički sistem je izolovan, a sudar dve čestice je elastičan. Referentni sistem je vezan za laboratoriju u kojoj se izvodi eksperiment, a kinetičke energije čestica pre sudara su jednake. Ako se čestica mase m zaustavi pri sudaru (ne kreće se posle sudara), odrediti vrednosti koeficijenata α i ξ.

4. Telo mase m je formirano tako što je u tankom disku poluprečnika R, konstantne gustine, napravljena šupljina poluprečnika $R/2$ (videti sliku uz zadatak). Ovo telo može da osciluje u vertikalnoj ravni (u ravni idealno tankog tela) oko tačke oslonca O bez proklizavanja u Zemljinom gravitacionom polju (ubrzanje Zemljine teže je g). Odrediti:

(a) [40] položaj centra mase tela u odnosu na tačku oslonca O;

(b) [40] moment inercije tela u odnosu na osu rotacije (prolazi kroz tačku oslonca O i normalna je na ravan tela) i

(c) [20] period malih oscilacija tela oko posmatrane ose.



Slika uz zadatak 4.

5. (a) [70] (***Teorijsko pitanje***) Izvesti izraze za zavisnost elongacije od vremena za prigušeno (amortizovano) kretanje tela duž pravca po glatkoj horizontalnoj podlozi. Telo mase m je povezano sa oprugom krutosti k koja je na drugom svom kraju fiksirana za nepokretan vertikalni zid. Pored elastične sile opruge, na telo deluje otporna sila $\vec{F}_{otp} = -b\vec{v}$, gde je $\vec{v}$ vektor brzine tela, a b je koeficijent otporne sile (faktor proporcionalnosti $b > 0$).

Napomena: Izvesti izraze za sve moguće vidove amortizovanog kretanja tela.

(b) [30] (***Zadatak***) Za telo iz prethodne tačke je poznata masa m i krutost opruge k. Odrediti koeficijent otporne sile b za slučaj kritičnog amortizovanog kretanja. Za tako određenu vrednost b, naći maksimalnu vrednost intenziteta brzine, ako se u početnom trenutku telo pusti bez početne brzine sa rastojanja x_0 od ravnotežnog položaja.

6. (a) [50] (***Teorijsko pitanje***) Izvesti izraz za brzinu longitudinalnog talasa koji se prostire u šipci.

(b) [50] (***Zadatak***) Longitudinalni impulsni talas se prostire duž šipke od stakla dužine $L = 10$ m. Ako se gustina duž ose šipke menja po zakonu $\rho(x) = \rho_0(1 + \alpha x)$, gde je $\rho_0 = 2400\ \mathrm{kg/m^3}$ i $\alpha = 0{,}02\ \mathrm{m^{-1}}$, odrediti vreme za koje će impuls stići sa jednog do drugog kraja šipke. Smatra se da je Jangov modul elastičnosti stakla konstantan (ne zavisi od x) i iznosi $E_Y = 4 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$.

Opšte napomene:

1) *Na vrhu korica vežbanke na sredini napisati* ***oznaku grupe*** *i* ***ime predmetnog nastavnika*** *kod koga ste zvanično raspoređeni da slušate predavanja:*

J. Cvetić (P1), V. Arsoski (P2) i M. Tadić (P3).

2) Ispit se polaže na dva načina: **(1) integralno** ili **(2) izradom II kolokvijuma**.

3) **Studenti koji rade samo drugi kolokvijum u gornjem levom uglu na koricama vežbanke treba da napišu K2 i rade zadatke 3-6 za vreme 3 h. Poželjno je DA U POLJA NA KORICAMA VEŽBANKE ispod brojeva 1 i 2 upišu K1, čime su se opredelili da im se priznaju bodovi sa I kolokvijuma.**

4) **Studenti koji polažu ispit integralno rade SVE ZADATKE (1-6) za vreme 3 h. Studentima koji nisu ništa napisali u gornjem levom uglu na koricama vežbanke ispit se pregleda kao integralni. Ukoliko je student radio integralni ispit, ne priznaje mu se parcijalno jedan deo!**

5) *Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati jasno označiti na koricama sveske (u odgovarajućoj rubrici) oznakom X.*

6) Na koricama vežbanke (u gornjem desnom uglu) treba napisati broj poena sa prijemnog ispita iz fizike (ako je rađen 2023. godine), u formi PR-ISP = ... poena. Ako nije rađen, napisati PR-ISP = NE. Ako znate da ste imali poene iz fizike na prijemnom, ali niste sigurni tačno koliko, napisati PR-ISP = ?. Ukoliko student ne stavi nikakvu oznaku za prijemni ispit, poeni sa prijemnog ispita mu se neće uzeti u obzir pri formiranju ocene.

7) *Dozvoljena je upotreba neprogramibilnih kalkulatora i grafitne olovke.*

8) **List sa tekstom zadataka poneti sa sobom. Ne ostavljati ga u vežbanci.**

9) Ispit se može napustiti po isteku **najmanje jednog sata** od početka ispita.

10) **Kompletan odgovor na teorijsko pitanje podrazumeva prikaz relevantne/ih skice/a, izvođenja i ispisivanje pratećeg teksta. Vektori moraju biti jasno obeleženi tako da se razlikuju od skalara.**

11) **Ako student nastavlja izradu zadatka, neophodno je da na mestu prekida izrade zadatka jasno naznači da nastavak postoji. Ukoliko se više zadataka (ili delova) radi na istoj strani, neophodno je rastaviti ih horizontalnom linijom preko cele širine stranice. Ne preskakati listove u vežbanci. Ukoliko se ostave prazne stranice između zadatka, a ne popune se do predaje vežbanke, precrtati ih.**

Fizika 1, ETF, Beograd
Januarski ispitni rok 2024. godine
Rešenja zadataka

1. (a) Videti skripta i beleške sa predavanja školske 2023/24.
(b1) Na osnovu
$$v_\rho = \dot{\rho} = u$$
integracijom, uz dati početni uslov za radijus, jednostavno sledi:
$$\rho(t) = ut.$$
(b2) Na osnovu
$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho(\dot{\varphi})^2 = -w,$$
za dati uslov $\varphi(t) \geq 0$ sledi:
$$\dot{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{w}{ut}}$$
i
$$v_\varphi = \sqrt{uwt}.$$
(b3) Integracijom, uz dati početni uslov za polarni ugao, sledi:
$$\varphi(t) = 2\sqrt{\frac{wt}{u}}.$$
(b4) Cirkularno ubrzanje je:
$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{uw}{t}}.$$

2. (a) Neka je kretanje čamca duž pozitivnog smera *x*-ose sa početkom na mestu pokretanja pogona. Prema Newtonovom zakonu dobija se jednačina kretanja
$$m\frac{dv_x}{dt} = F_p - bv_x\,. \qquad (1)$$
Granična brzina kretanja čamca $v_{\max}$ se dobija iz (1) kada prestane ubrzavanje čamca $dv_x/dt = 0$. Sledi $v_{\max} = F_p/b$. Prema uslovu u zadatku čamac dostiže polovinu granične brzine $v_0 = v_{\max}/2 = F_p/2b$.

Posle preuređenja, integracijom jednačine (1) se, uz korišćenje početnih uslova i smene $\xi = F_p - bv_x$, dobija
$$\int_{F_p}^{F_p/2}\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{b}{m}\int_0^{\tau_1} dt \Rightarrow \tau_1 = \frac{m}{b}\ln 2. \qquad (2)$$
Ovde je τ_1 vreme kretanja čamca do dostizanja brzine v_0.

(b) Kada se okrene motorni pogon unazad jednačina kretanja čamca je
$$m\frac{dv_x}{dt} = -F_p - bv_x\,. \qquad (3)$$
Iz (3), uz korišćenje početnih uslova i smene $\xi = F_p + bv_x$, sledi
$$\int_{3F_p/2}^{F_p}\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{b}{m}\int_0^{\tau_2} dt \Rightarrow \tau_2 = \frac{m}{b}\ln(3/2). \qquad (4)$$
Ovde je τ_2 vreme kretanja čamca od trenutka okretanja motornog pogona unazad do zaustavljanja.

(c) $\tau_1/\tau_2 = \ln 2/\ln(3/2) = 1{,}71 > 1$. Vreme dostizanja brzine v_0 je duže od vremena zaustavljanja jer sredina deluje suprotno pogonskoj sili pa je ubrzanje manje od usporenja čamca.

---

3. (a) Videti skripta i beleške sa predavanja školske 2023/24.

(b) Na osnovu uslova jednakosti kinetičkih energija čestica pre sudara:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

sledi:

$$\xi = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Sada imamo:

$$m_2 v_2^2 = \frac{m_2 {v_2'}^2}{2},$$

gde je v_2' brzina druge čestice posle sudara. Sledi:

$$v_2' = \sqrt{2}\alpha v.$$

Na osnovu zakona o održanju količine kretanja:

$$m_1 v + \xi m_1 \alpha v = \frac{1}{\alpha^2} m_1 \sqrt{2}\alpha v.$$

Odavde direktno sledi:

$$\alpha = \sqrt{2} - 1.$$

Takođe,

$$\xi = \frac{1}{\alpha^2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

4. Površina tela je $S = \pi R^2 - \pi(R/2)^2 = 3\pi R^2/4$, pa je površinska gustina tela $\rho_S = 4m/(3R^2\pi)$, gde je m masa tela, tako da je masa celog diska $M = \pi R^2 \rho_S = 4m/3$, a masa isečenog dela $m' = \pi(R/2)^2\rho_S = m/3$. Primenom principa superpozicije, za referentnu osu x sa početkom u O koja prolazi kroz centar celog diska ($x_{CM,\mathrm{O}(M)} = R$) i isečenog dela ($x_{CM,\mathrm{O}(m')} = R/2$), dobija se položaj centra mase tela:

$$x_{CM,\mathrm{O}} = \frac{M \cdot R + (-m') \cdot R/2}{M + (-m')} = \frac{4mR/3 - mR/6}{m} = \frac{7}{6}R. \qquad (1)$$

(b) Moment inercije šupljeg diska u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku vešanja O može se dobiti na sličan način kao pod (a), primenom Steinerove teoreme ($I_{m_i,\mathrm{O}} = I_{m_i,CM} + m_i x_{CM,\mathrm{O}(m_i)}^2$) i principa superpozicije:

$$I_{m,\mathrm{O}} = I_{M,\mathrm{O}} - I_{m',\mathrm{O}} = \frac{3}{2}MR^2 - \frac{3}{2}m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{15}{8}mR^2. \qquad (2)$$

(c) Rezultantni moment sile koji deluje na disk u odnosu na pol O, za male ugaone elongacije, je

$$M_\mathrm{O} = I_{m,\mathrm{O}}\ddot{\theta} = -mgx_{CM,\mathrm{O}} \cdot \theta.$$

Koristeći (1) i (2) i primenom drugog Newtonovog zakona na rotaciono kretanje diska oko tačke O dobijamo za male ugaone elongacije

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \omega_0^2 = mgx_{CM,\mathrm{O}}/I_{m,\mathrm{O}} = 28g/(45R).$$

Period malih oscilacija šupljeg diska je

$$T = 2\pi / \omega_0 = 3\pi\sqrt{5R/(7g)}\ .$$

Telo se kreće kao fizičko klatno, tako da se do ovog izraza može direktno doći primenom formule za period oscilovanja fizičkog klatna:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{m,O}}{mgx_{CM,O}}}.$$

5. (a) Videti skripta i beleške sa predavanja školske 2023/24. godine.

(b) U slučaju kritično amortizovanog kretanja, telo se najbrže vraća u ravnotežan položaj. Za ovo kretanje je

$$\alpha = \frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \Longrightarrow b = 2\sqrt{km}.$$

Jednačina kretanja tela (izvedeno pod (a)) je

$$x(t) = e^{-\alpha t}(C_1 + C_2 t),$$

dok je izraz za brzinu:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\alpha e^{-\alpha t}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-\alpha t},$$

odakle se, primenom početnih uslova ($x(0) = x_0$ i $v(0) = 0$), dobija:

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}(1 + \alpha t),$$
$$v(t) = -\alpha^2 x_0 t e^{-\alpha t}.$$

Iz uslova $\left.\frac{d|\vec{v}|}{dt}\right|_{\tau} = 0$, trenutak kada je intenzitet brzine maksimalan je $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m}{k}}$, odakle je

$$|\vec{v}|_{\max} = |\vec{v}(\tau)| = \frac{\alpha x_0}{e} = \frac{x_0}{e}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

6. (a) Videti skripta i beleške sa predavanja školske 2023/24. godine.

(b) Videti rešenje 425. zadatka iz "Fizika – Zbirka rešenih zadataka".

Beograd, 11.1.2024.

Predmetni nastavnici

J. Cvetić (P1), V. Arsoski (P2) i M. Tadić (P3)