**ISPIT IZ FIZIKE 1**

Januarski ispitni rok

(Ispit traje 3 sata) ETF, Beograd, 26.01.2021.

**1.** Tačka se kreće pravolinijski sa usporenjem čija apsolutna vrednost zavisi od intenziteta brzine $a = b\sqrt{v}$ $(b > 0)$. U početnom trenutku tačka je imala brzinu intenziteta $v_0$. Odrediti:

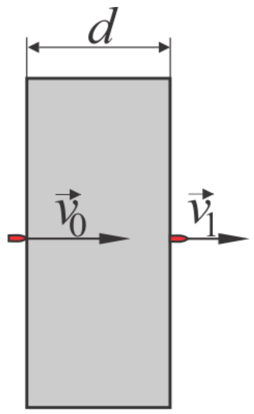
(a) [50] put koji će preći tačka do zaustavljanja;

(b) [50] srednju brzinu tačke na tom putu.

**2.** [100] Metak (koji se može smatrati materijalnom tačkom) mase $m$ ispali se iz oružja ka drvenom nepokretnom vertikalnom zidu debljine $d$ (videti sliku). Metak se kreće normalno na zid, brzina metka pri ulazu u zid je $v_0$, brzina metka pri izlazu iz zida je $v_1$ i na metak pri kretanju kroz zid deluje otporna sila $F_{ot}$ smera suprotnog vektoru brzine metka, a intenziteta direktno srazmernog kvadratu intenziteta brzine metka $v$, $F_{ot} = mkv^2$, $k = const > 0$, dok su sve ostale sile na metak pri kretanju kroz zid zanemarljivo male. Za poznato $v_0$, $v_1$ i $d$, odrediti:

(a) [50] koeficijent $k$;

(b) [50] vreme kretanja metka kroz zid $t$.




Slika uz zadatak 2.

---

**3.** Mala kuglica mase $m$ se pusti da padne sa visine $h$ i da se odbije od podloge. Ako se posle sudara brzina smanji $\xi$ puta ($\xi > 1$) odrediti:

(a) [20] promenu impulsa kuglice posle prvog sudara kuglice i podloge;

(b) [80] kumulativnu (zbirnu) promenu impulsa kuglice posle beskonačno mnogo sudara sa podlogom.

*Uputstvo: Smatrati da je masa kuglice mala u odnosu na podlogu.*

*Za malu vrednost* $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ je:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots = \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

**4.** Kruti homogeni tanki štap dužine $L$ je jednim svojim krajem vezan za nepokretnu horizontalnu osovinu u tački $O$, oko koje rotira bez trenja. U početnom trenutku ($t_0 = 0$ s) štap miruje u gornjem vertikalnom položaju tako da je centar mase štapa (tačka *CM*) postavljen vertikalno iznad tačke vešanja $O$, kao što je prikazano na slici. Odrediti:

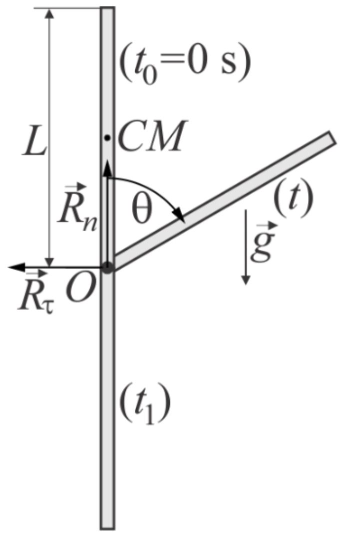
(a) [20] zavisnost ugaonog ubrzanja štapa od ugla rotacije $\theta$, $\alpha(\theta)$;

(b) [60] zavisnost ugaone brzine štapa od ugla rotacije $\theta$, $\omega(\theta)$;

(c) [10] intenzitet normalne komponente sile reakcije osovine na štap u trenutku $t_1$ kada štap prolazi kroz donji vertikalni položaj, $R_n$;

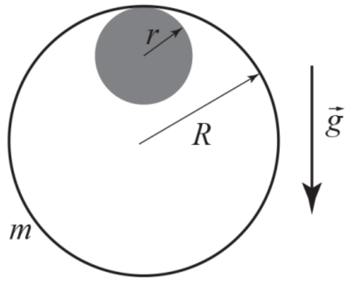
(d) [10] intenzitet tangencijalne komponente sile reakcije osovine na štap u trenutku $t_1$ kada štap prolazi kroz donji vertikalni položaj, $R_\tau$.

*Napomene*: $\theta$ je ugao koji štap zaklapa sa vertikalom (videti sliku; $\theta(t_0 = 0\ \text{s}) = 0$ rad, $\theta(t_1) = \pi$ rad). Ubrzanje Zemljine teže je *g*.




Slika uz zadatak 4.

**5.** (a) [40] ***(Teorijsko pitanje.)*** Izvesti izraz za period malih oscilacija fizičkog klatna.
(b) [60] Na nepokretnu šipku poluprečnika $r$ stavljen je prsten mase $m$ i poluprečnika $R > r$ (videti sliku uz zadatak 5). Odrediti period malih oscilacija ukoliko se prsten kreće po šipki bez proklizavanja. Smatrati da su oscilacije isključivo u ravni prstena (u ravni slike). Ubrzanje Zemljine teže je $g$.




Slika uz zadatak 5.

**6.** (a) [40] ***(Teorijsko pitanje.)*** Polazeći od opšteg izraza za oblik talasne funkcije u linearnoj, nediperzivnoj i nedisipativnoj sredini izvesti talasnu jednačinu za linijski (1D) talas.
(b) [60] Dat je izraz za poremećaj na zategnutoj žici:

$$y(x,t) = \frac{A}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 2\frac{x}{\alpha}\frac{t}{\beta} + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2 + 1},$$

gde je $A = 1$ cm, $\alpha = 1$ m i $\beta = 1$ s. Da li ovaj izraz predstavlja talasnu funkciju putujućeg talasa u linearnoj, nediperzivnoj i nedisipativnoj sredini? Dati objašnjenje. Ukoliko predstavlja, odrediti amplitudu, brzinu i smer prostiranja talasa.

*Opšte napomene:*

1) *Na vrhu naslovne strane vežbanke napisati* ***oznaku grupe*** *i* ***ime predmetnog nastavnika*** *kod koga ste zvanično raspoređeni da slušate predavanja:*

***J. Cvetić (P1), V. Arsoski (P2) i M. Tadić (P3).***

2) **Studenti trebaju da u gornjem levom uglu vežbanke zabeleže šta rade. Ukoliko rade samo prvi kolokvijum u gornjem levom uglu na koricama vežbanke treba da napišu K1 i za njih ispit traje 2 sata. Dežurni nastavnik će obavestiti studente da predaju vežbanke nakon predviđenog vremena. Ukoliko student ne preda vežbanku, pri pregledanju će mu se računati kao da je radio integralni ispit.**
3) **Studenti koji rade samo drugi kolokvijum u gornjem levom uglu na koricama vežbanke treba da napišu K2 i rade ZADATKE 3-6 za vreme 3 h.**
4) **Studenti koji polažu integralni ispit rade SVE ZADATKE (1-6) za vreme 3 h. Studentima koji nisu ništa napisali u gornjem levom uglu na koricama vežbanke ispit se pregleda kao integralni. Ukoliko je student radio integralni ispit, ne može mu se parcijalno priznati prvi ili drugi deo!**
5) *Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati jasno označiti na koricama sveske (u odgovarajućoj rubrici) oznakom X.*
6) Na koricama vežbanke (u gornjem desnom uglu) treba napisati broj poena sa prijemnog ispita iz fizike (ako je rađen 2020. godine), u formi PR-ISP = ... poena. Ako nije rađen, napisati PR-ISP = NE. Ako znate da ste imali poene iz fizike na prijemnom, ali niste sigurni tačno koliko, napisati PR-ISP = ? Ukoliko student ne stavi nikakvu oznaku za prijemni ispit, poeni sa prijemnog ispita mu se neće uzeti u obzir.
7) *Dozvoljena je upotreba neprogramibilnih kalkulatora i grafitne olovke.*
8) **List sa tekstom zadataka poneti sa sobom, ne ostavljati list u vežbanci.**
9) Ispit se može napustiti po isteku **najmanje jednog sata** od početka ispita.

**Rešenja zadataka, Fizika 1, ETF, Beograd**
**Januarki ispitni rok 2021.**

**1.** (a) Kako je $a = v\dfrac{dv}{dx} = -b\sqrt{v}$ , sledi

$$\int_{v_0}^{0} \sqrt{v}dv = -b\int_{0}^{S} dx \to S = \frac{2}{3b}v_0^{3/2},$$

gde je $S$ pređeni put tačke do zaustavljanja.

(b) Takođe je $a = \dfrac{dv}{dt} = -b\sqrt{v}$ , sledi

$$\int_{v_0}^{0} v^{-1/2}dv = -b\int_{0}^{S} dt \to \tau = \frac{2}{b}v_0^{1/2},$$

gde je $\tau$ vreme potrebno da se tačka zaustavi. Srednja brzina je

$$v_{sr} = S/\tau = v_0/3.$$

**2.** (a) Jednačina kretanja metka je:

$$m\frac{dv}{dt} = -mkv^2.$$

Množenjem i deljenjem leve strane sa $dx$ ($x$ osa je horizontalno postavljena sa početkom na mestu ulaza metka u zid) i koristeći $v = dx/dt$:

$$v\frac{dv}{dx} = -kv^2.$$

Ova diferencijalna jednačina se rešava razdvajanjem promenljivih:

$$\frac{dv}{v} = -kdx.$$

Integracija:

$$\ln\frac{v_1}{v_0} = -kd.$$

Odavde sledi:

$$k = \frac{1}{d}\ln\frac{v_0}{v_1}.$$

(b) Integralimo još jednom jednačinu:

$$m\frac{dv}{dt} = -mkv^2.$$

Razdvajanjem promenljivih:

$$\frac{dv}{v^2} = -kdt.$$

Integracija:

$$-\frac{1}{v}\bigg|_{v_0}^{v_1} = -kt.$$

Odavde je:

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} = kt.$$

Zamenom izraza za $k$ u ovaj rezultat, dobija se:

$$t = \frac{d}{\ln\frac{v_0}{v_1}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right).$$

**3.** Kuglica neposredno pre sudara sa podlogom ima brzinu $v_0 = \sqrt{2gh}$ .

(a) Posle odbijanja od podloge brzina kuglice je $v_1 = \sqrt{2gh}/\xi$ . Promena impulsa je (prema referentnom smeru od podloge vertikalno naviše) je

$$\Delta p_1 = m(v_1 - v_0) = m\sqrt{2gh}(1 + 1/\xi). \qquad (1)$$

(b) Posle drugog odbijanja promena impulse je

$$\Delta p_2 = m(v_2 - v_1) = m\sqrt{2gh}\left(1/\xi + 1/\xi^2\right) = \Delta p_1 \cdot 1/\xi.$$

Posle $i$ -tog odbijanja promena impulse je

$$\Delta p_i = m(v_i - v_{i-1}) = m\sqrt{2gh}\left(1/\xi^i + 1/\xi^{i-1}\right) = \Delta p_1 \cdot 1/\xi^{i-1}. \qquad (2)$$

Sabiranjem $n$ promena impulsa definisanih jednačinom (2) za $n \to \infty$ sledi

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \ldots + \Delta p_n = \Delta p_1 \cdot \left(1 + 1/\xi + \ldots + 1/\xi^{n-1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\Delta p_1}{1 - 1/\xi} = m\sqrt{2gh}\,\frac{\xi + 1}{\xi - 1}.$$

**4.** (a) Momentna jednačina je:

$$I\alpha = mg\frac{L}{2}\sin\theta.$$

Uvrštavajući izraz za moment inercije štapa $I = mL^2/3$ u ovu jednačinu dobija se:

$$\alpha = \frac{3g}{2L} sin\theta.$$

(b) Rešavamo momentnu jednačinu:

$$I\frac{d\omega}{dt} = mg\frac{L}{2}\sin\theta.$$

Množenjem i deljenjem leve strane sa $d\theta$ i koristeći $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ dobijamo:

$$I\omega d\omega = mg\frac{L}{2}\sin\theta\, d\theta.$$

Integracijom se dobija:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)}.$$

(c) Za kretanje centra mase u datom vremenskom trenutku važi:

$$ma_n = m\frac{L}{2}\omega_1^2 = R_n - mg,$$

gde je $\omega_1 = \omega(t_1) = \sqrt{6g/L}$. Sledi:

$$R_n = 4mg.$$

(d) Za kretanje centra mase u datom vremenskom trenutku važi:

$$ma_\tau = m\frac{L}{2}\alpha = R_\tau.$$

S obzirom da je $\alpha(t_1) = \alpha(\theta = \pi \text{ rad}) = 0$ sledi:

$$R_\tau = 0.$$

**5.** (a) Videti beleške sa predavanja 2020/21. i skripta P. Marinković, „Fizika 1“.

(b) Ukoliko se za osu rotacije usvoji tačka koja je u kontaktu sa šipkom (trenutni pol), onda je:

$$I_P\ddot{\varphi} = -mgR\sin\theta,$$

gde je $I_P = I_{CM} + mR^2 = 2mR^2$, $\theta$ ugao između vertikale i prave povučene kroz centar prstena i trenutni pol, a ugao $\varphi$ za koji prsten zarotira oko centra mase je:

$$\varphi = \theta - \frac{\theta r}{R} = \theta\frac{R-r}{R} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R-r}{R}\dot{\theta} \text{ i } \ddot{\varphi} = \frac{R-r}{R}\ddot{\theta},$$

pa je za male oscilacije ($\sin\theta \cong \theta$):

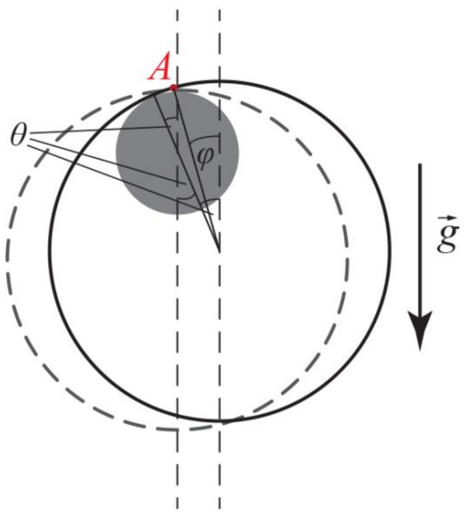
$$2mR^2\ddot{\theta}\frac{R-r}{R} + mgR\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{2(R-r)}\theta = 0 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

Zadatak se može rešiti i primenom zakona održanja energije. Potencijalna i kinetička energija prstena su:

$$E_p = mg(R-r)(1-\cos\theta),$$

$$E_k = \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2,$$

respektivno, gde je $v_{CM} = \dot{\theta}(R-r)$.




Kinetička energija je:

$$E_k = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{R-r}{R}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 = m(R-r)^2\dot{\theta}^2.$$

Ukupna energija je:

$$E = E_p + E_k = m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta).$$

Kako je $E = const$ ($dE/dt = 0$), pa se nakon diferenciranja gornje jednačine dobija:

$$0 = 2m(R-r)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(R-r)\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 2m(R-r)^2\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{2(R-r)}\sin\theta\right),$$

gde je za male oscilacije $\sin\theta \cong \theta$, pa je

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2(R-r)}\theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}},$$

gde se za $r \ll R$ približno dobija $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$.

Ukoliko se aproksimativno pretpostavi da je tačka koja je u kontaktu sa šipkom približno nepokretna, onda je $I = 2mR^2$ i $s = R$, pa je iz formule za fizičko klatno:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Ukoliko se pretpostavi da je moment sile trenja mnogo manji od momenta gravitacione sile, zadatak se približno može rešiti kao da je u pitanju fizičko klatno dužine $s = R - r$, gde je moment inercije $I = I_{CM} + m(R-r)^2$. Period malih oscilacija je tada:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + (R-r)^2}{g(R-r)}} \xrightarrow{R \gg r} 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

**6.** (a) Videti beleške sa predavanja 2020/21.

(b) Očigledno je da se talasna funkcija može zapisati u obliku:

$$y(x,t) = \frac{A}{\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{t}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{A}{\frac{1}{\alpha^2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}t\right)^2 + 1} = \frac{1\ \mathrm{cm}}{(x + ct)^2\mathrm{m}^{-2} + 1} = f(x + ct),$$

što predstavlja jednačinu impulsnog talasa koji se prostire u smeru suprotnom od smera *x*-ose, ima brzinu $c = \alpha/\beta$ = 1 m/s i amplitudu $y_0 = A$ = 1 cm.