

KOLOKVIJUM IZ FIZIKE 1

(Kolokvijum traje 2 sata)

ETF, Beograd, 19.11.2023.

1. Zadate su projekcije brzine tačke u Dekartovom xOy sistemu (tačka kreće iz koordinatnog početka u vremenskom trenutku $t = 0$ s):

$$\begin{aligned}v_x(t) &= c, \\v_y(t) &= -\frac{2b}{c}x(t),\end{aligned}$$

gde su b i c pozitivne konstante.

Odrediti:

- [25] vektor položaja $\vec{r}(t)$ i jednačinu trajektorije tačke $y(x)$ i skicirati je;
- [20] vremensku zavisnost vektora brzine i vektora ubrzanja, kao i njihovih intenziteta;
- [15] tangencijalno i normalno ubrzanje tačke u funkciji vremena;
- [15] tangens ugla između vektora brzine i ubrzanja i na osnovu njega odrediti prirodu kretanja za $t > 0$ (ubrzano, usporeno ili uniformno);
- [15] poluprečnik krivine trajektorije u funkciji vremena;
- [10] srednju vrednost vektora brzine tačke od početnog do vremenskog trenutka t .

2. (a) [20] (*Teorijsko pitanje*) Formulirati inverzni problem za kretanje materijalne tačke duž x ose.

(*Zadatak*) Materijalna tačka mase m kreće se po kružnici pod dejstvom sile \vec{F} čije su projekcije na radijalnu i cirkularnu osu polarnog koordinatnog sistema respektivno $F_\rho(t) = -pe^{2\beta t}$ i $F_\varphi(t) = qe^{\beta t}$, gde su p , q i β pozitivne konstante. Referentna tačka je u centru kružnice, a ugaona brzina u početnom trenutku $t_0 = 0$ s je ω_0 . Za poznato m , ω_0 , β , q , vrednost polarnog ugla u početnom trenutku $\varphi(0) = 0$ rad i $p = \omega_0 q / \beta$, za kretanje ove materijalne tačke odrediti:

- [40] zavisnost ugaone brzine od vremena $\omega(t)$;
- [10] zavisnost ugaonog ubrzanja od vremena $\alpha(t)$;
- [15] parametarsku jednačinu kretanja $\varphi(t)$;
- [15] tangencijalno i normalno ubrzanje u funkciji vremena, $a_\tau(t)$ i $a_n(t)$, respektivno i poluprečnik krivine trajektorije R .

Napomene:

(1) Na vrhu naslovne strane vežbanke napisati oznaku grupe i prezime predmetnog nastavnika angazovanog za izvodjenje nastave u toj nastavnoj grupi:

P1-Cvetić, P2-Arsoski, P3-Tadić.

(2) Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati jasno označiti na koricama sveske, u odgovarajućoj rubrici, oznakom X.

(3) Dozvoljena je upotreba neprogramibilnih kalkulatora i svih vrsta pisaljki, sem onih koje pišu crvenom bojom.

(4) List sa tekstom zadataka poneti sa sobom, ne ostavljati u vežbanci.

(5) Kolokvijum se može napustiti po isteku najmanje jednog sata od njegovog početka.

(6) **Kompletan odgovor na teorijsko pitanje podrazumeva prikaz relevantne/ih skice/a, izvođenja i ispisivanje pratećeg teksta. Vektori moraju biti jasno obeleženi tako da se razlikuju od skalara.**

(7) **Ako student nastavlja izradu zadatka, neophodno je da na mestu prekida izrade zadatka jasno naznači da nastavak postoji. Ukoliko se više zadataka (ili delova) radi na istoj strani, neophodno je rastaviti ih horizontalnom linijom preko cele širine stranice. Ne preskakati listove u vežbanci. Ukoliko se ostave prazne stranice između zadatka, a ne popune se do predaje vežbanke, precrtati ih.**

Rešenja zadataka sa kolokvijuma iz Fizike 1 2023. god.

1. (a) $\frac{dx}{dt} = c \rightarrow x(t) = ct, \frac{dy}{dt} = -2bt, y(t) = -bt^2, \vec{r}(t) = ct\vec{e}_x - bt^2\vec{e}_y, y(x) = -bx^2/c^2$ (parabola).

(b) $\vec{v} = c\vec{e}_x - 2bt\vec{e}_y, |\vec{v}| = \sqrt{c^2 + 4b^2t^2}, \vec{a} = -2b\vec{e}_y, |\vec{a}| = a = 2b = \text{const.}$

(c) Pozitivni referentni smer je u smeru početne brzine za $t > 0$.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\vec{v}\vec{a}}{v} = \frac{2b}{a} \frac{2bt}{\sqrt{c^2 + 4b^2t^2}} = \frac{2b}{a} \frac{2bt}{\cos(\angle(\vec{v}, \vec{a}))}$$

$$a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v} = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{2b}{a} \frac{c}{\sin(\angle(\vec{v}, \vec{a}))}$$

(d) $\text{tg}(\angle(\vec{v}, \vec{a})) = |\vec{v} \times \vec{a}|/(\vec{v}\vec{a}) = c/(2bt)$. Kretanje je ubrzano jer je ugao između vektora brzine i ubrzanja manji od $\pi/2$ ($\text{tg}(\angle(\vec{v}, \vec{a})) > 0$). Dodatno se može primetiti da se sa porastom vremena smanjuje ugao između vektora brzine i ubrzanja, pa je kretanje ubrzano za svako $t > 0$.

(e) $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{(c^2 + 4b^2t^2)^{3/2}}{2bc}$.

(f) $\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t \vec{v} dt = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = c\vec{e}_x - bt\vec{e}_y$.

2. (a) Videti beleške sa predavanja 2023/24. školske godine i skripta.

(b) Za kružno kretanje $\rho = R = \text{const}$ i $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, pa je:

$$F_\varphi = ma_\varphi = m(0 + \rho\dot{\varphi}) = mR\alpha = mR \frac{d\omega}{dt} = qe^{\beta t},$$

$$-F_\rho = -ma_\rho = -m(0 - \rho\dot{\varphi}^2) = mR\omega^2 = pe^{2\beta t} = \frac{\omega_0 q}{\beta} e^{2\beta t}.$$

Deljenjem prethodnih jednačina i integracijom:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^2} = \int_0^t \frac{\beta}{\omega_0} e^{-\beta t} dt, \Rightarrow \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} (1 - e^{-\beta t}) \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \omega_0 e^{\beta t}.$$

(c) $\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \omega_0 \beta e^{\beta t}$.

(d) $\varphi(t) = \int_0^t \omega dt = \frac{\omega_0}{\beta} (e^{\beta t} - 1)$.

(e) Za usvojeno $\vec{e}_\tau = \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\rho = -\vec{e}_n$:

$$a_\tau(t) = \frac{F_\varphi(t)}{m} = \frac{q}{m} e^{\beta t}, a_n(t) = \frac{-F_\rho(t)}{m} = \frac{|F_\rho(t)|}{m} = \frac{\omega_0 q}{\beta m} e^{2\beta t} \text{ i } R = \frac{q}{m\omega_0\beta}.$$