Rešenja zadataka, Fizika 1, ETF, Beograd
Prvi kolokvijum, novembar 2018.

1. Trajektorija materijalne tačke je kružnica poluprečnika A, po kojoj se tačka kreće konstantom ugaonom brzinom ω, odakle je trivijalno naći rešenja (a)-(d). Standardni način rešavanja je:

(a) Projekcije vektora brzine su:

$$v_x(t) = \omega\frac{\sqrt{3}}{4}A\cdot\cos(\omega t) - \omega\frac{\sqrt{3}}{2}A\cdot\sin(\omega t),$$
$$v_y(t) = \omega\frac{1}{2}A\cdot\cos(\omega t),$$
$$v_z(t) = \omega\frac{3}{4}A\cdot\cos(\omega t) + \omega\frac{1}{2}A\cdot\sin(\omega t),$$

odakle je:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega A = \pi\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = const.$$

Projekcije vektora ubrzanja su:

$$a_x(t) = -\omega^2\frac{\sqrt{3}}{4}A\cdot\sin(\omega t) - \omega^2\frac{\sqrt{3}}{2}A\cdot\cos(\omega t),$$
$$a_y(t) = -\omega^2\frac{1}{2}A\cdot\sin(\omega t),$$
$$a_z(t) = -\omega^2\frac{3}{4}A\cdot\sin(\omega t) + \omega^2\frac{1}{2}A\cdot\cos(\omega t),$$

odakle je:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 A = \pi^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = const.$$

(b) Tangencijalno ubrzanje je:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0,$$

pa je normalno ubrzanje

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = |a| = \omega^2 A = \pi^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Poluprečnik krivine je:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\omega^2 A^2}{\omega^2 A} = A = 1\ \mathrm{m}.$$

Tangencijalno ubrzanje, normalno ubrzanje i poluprečnik krivine trajektorije su konstantni u funkciji vremena. Reč je o ravnomerno promenljivom kružnom kretanju.

(c) Srednja vrednost vektora brzine u vremenskom intervalu $t \in [0,1]$s je:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{[x(1\mathrm{s}) - x(0)]\vec{e}_x + [y(1\mathrm{s}) - y(0)]\vec{e}_y + [z(1\mathrm{s}) - z(0)]\vec{e}_z}{1\mathrm{s}} = \left(-\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_z\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(d) Sektorska brzina je:

$$\vec{v}_S = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{\omega A^2}{8}\left(\vec{e}_x - 2\sqrt{3}\vec{e}_y + \sqrt{3}\vec{e}_z\right).$$

Intenzitet sektorske brzine je:

$$v_S = |\vec{v}_S| = \frac{\omega A^2}{2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}.$$

2. Ako je brzina čamca duž *x*-ose v_x jednačina kretanja je (F_0 je intenzitet koja pogoni čamac, $F_0 = |\vec{F}_0|$) :

$$-bv_x + F_0 = m\frac{dv_x}{dt}, \tag{1}$$

odnosno diferencijalna jednačina (DJ) (1) kretanja čamca glasi

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{b}{m}v_x = \frac{F_0}{m}. \tag{2}$$

(a) DJ (2) ima rešenje oblika

$$v_x = Ae^{-bt/m} + B, \tag{3}$$

gde se konstante određuju zamenom u (2) i iz početnog islova za brzinu $v_x(t=0)=0$, sledi

$$B = F_0/b,\ A = -F_0/b\ . \tag{4}$$

Iz (3) i (4) sledi konačno rešenje za brzinu:

$$v_x = \frac{F_0}{b}(1-e^{-bt/m}). \tag{5}$$

Intenzitet brzine u funkciji vremena je:

$$v(t) = \frac{|\vec{F}_0|}{b}\left(1 - e^{-b\ /m}\right). \tag{6}$$

(b) Maksimalna brzina čamca se dobija iz (5) za $v_x(t\to\infty) = F_0/b$. Iz uslova u zadatku sledi

$$t_{1/2} = (m/b)\ln 2\,. \tag{7}$$

(c) Kako je $v_x = \frac{F_0}{b}(1-e^{-bt/m}) = \frac{dx}{dt}$, integracijom i zamenom vremena (7):

$$x_{1/2} = \frac{F_0}{b}\left(t_{1/2} + \frac{m}{b}e^{-bt/m}\Big|_0^{t_{1/2}}\right). \tag{8}$$

Dobija se:

$$x_{1/2} = \frac{|\vec{F}_0|m}{b^2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

Beograd, 18.11.2018.

Predmetni nastavnici

Jovan Cvetić, Vladimir Arsoski, Milan Tadić