

ISPIT IZ FIZIKE 1

Ispitni rok Oktobar 2 (3 sata)

ETF, Beograd, 26. 10. 2025.

1. Tačka se kreće u ravni tako da joj je tangencijalno ubrzanje $a_t(t) = p$, a normalno $a_n(t) = qt^4$, gde su p i q pozitivne realne konstante, a t vreme. U početnom trenutku $t = 0$ tačka miruje. Naći poluprečnik krivine trajektorije R i intenzitet vektora ubrzanja a u funkciji pređenog puta s .

2. Uz strmu ravan nagibnog ugla $\beta = 30^\circ$ gurne se blok nekom početnom brzinom. Blok se popne na određenu visinu odakle počinje da klizi niz strmu ravan. Ukoliko je brzina pri prolasku bloka kroz početni položaj za 20 % manja od početne brzine kojom je gurnut uz strmu ravan, odrediti koeficijent dinamičkog trenja između strme ravni i bloka.

3. (a) [40] (**Teorijsko pitanje**) Izvesti jednačinu Meščerskog i jednačinu (formulu) Ciolkovskog.

(b) (**Zadatak**) Raketa ukupne mase $m_0 = 28 \cdot 10^6$ kg miruje u odnosu na Zemlju u vasioni udaljena od Zemlje i drugih nebeskih tela. U početnom trenutku $t_0 = 0$ s uključe se raketni motori koji izbacuju vrele gasove konstantnom relativnom brzinom $v_{gr} = 2,5$ km/s u odnosu na raketu. Ako se po uključenju motora raketa kreće ravnomerno promenljivo pravolinijski ubrzanjem $a = 10$ m/s²:

(b1) [20] Odrediti brzinu potrošnje goriva $|dm/dt|$ u $t_0 = 0$ s.

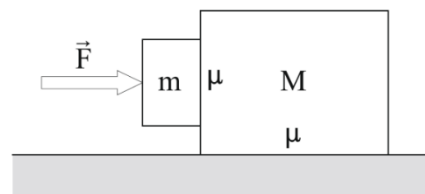
(b2) [20] U kom vremenskom trenutku $t = t'$ je masa rakete jednaka m_0/e ?

(b3) [10] Raketno gorivo se istroši u vremenskom trenutku $t = \tau = 1200$ s. Odrediti masu rakete u tom trenutku, $m(t = \tau)$. Ovu vrednost dati sa 6 značajnih cifara.

(b4) [10] Odrediti brzinu rakete u trenutku $t = \tau$, $v(t = \tau)$.

4. (a) [30] (**Teorijsko pitanje**) Uslovi statičke ravnoteže krutog tela.

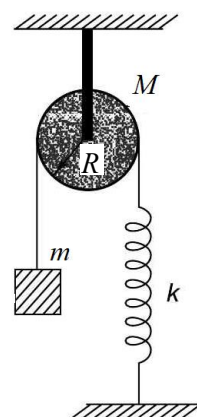
(b) [70] (**Zadatak**) Stalna horizontalna sila inteziteta F deluje na sistem od dva tela mase m i M , kao na slici uz zadatak. Koeficijent trenja između blokova je isti kao i između bloka M i podloge i jednak je μ . Za $m = 1$ kg, $M = 10 \cdot m$, $\mu = 1/\sqrt{5}$ odrediti opseg intenziteta sile F za koji je sistem u statičkoj ravnoteži. Poznato je gravitaciono ubrzanje $g = 9,81$ m/s².



Slika uz zadatak 4.

5. (a) [40] (**Teorijsko pitanje**) Izvesti diferencijalnu jednačinu linearnog harmonijskog oscilatora (LHO) na primeru lake horizontalno postavljene opruge krutosti k za koju je prikačen blok mase m koji se kreće po glatkoj horizontalnoj podlozi. Rešiti ovu jednačinu i odrediti kružnu frekvenciju LHO. Definirati parametre LHO (elongaciju x , amplitudu A , fazu φ , početnu fazu φ_0 i period oscilovanja T). Izvesti izraz za zavisnost elongacije od vremena $x(t)$, ako je poznato $x(0) = x_0$ i $v(0) = v_0$ (v je algebarska vrednost projekcije vektora brzine na referentnu x -osu).

(b) [60] (**Zadatak**) Telo mase m je preko pokretne koturače (oblika valjka, koji može da se okreće u ležištu bez trenja) mase M , povezano neistegljivim, idealno savitljivim koncem za oprugu konstante krutosti k (videti sliku uz zadatak). Konac i opruga su zanemarive mase, pri čemu konac pri kretanju ne proklizava preko koturače. Kada se telo mase m izvede malo iz ravnotežnog položaja i pusti, odrediti period oscilacija sistema.



Slika uz zadatak 5.

6. Disperziona relacija talasa koji se prostire po površi vode u dubokom jezeru je $\omega(k) = \sqrt{gk + \beta k^3}$, gde je g gravitaciono ubrzanje, a $\beta = \text{const} > 0$. Talasna dužina talasa je λ . Odrediti:

(a) [30] količnik grupne i fazne brzine ovog talasa v_g/v_f za $\lambda \ll \sqrt{\beta/g}$;

(b) [30] količnik grupne i fazne brzine ovog talasa v_g/v_f za $\lambda \gg \sqrt{\beta/g}$.

(c) [40] Ako je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a $\beta = 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^2$, odrediti vrednost talasne dužine za koju su fazna i grupna brzina ovog talasa jednake.

Opšte napomene:

1) Na vrhu korica vežbanke na sredini napisati **oznaku grupe i ime predmetnog nastavnika** kod koga ste zvanično raspoređeni da slušate predavanja:

J. Cvetić (P1), V. Arsoski (P2) i M. Tadić (P3).

2) Ispit se polaže na dva načina: **(1) integralno ili (2) izradom II kolokvijuma.**

3) **Studenti koji rade samo drugi kolokvijum u gornjem levom uglu na koricama vežbanke treba da napišu K2 i rade zadatke 3-6 za vreme 3 h. Poželjno je DA U POLJA NA KORICAMA VEŽBANKE ispod brojeva 1 i 2 upišu K1, čime su se opredelili da im se priznaju bodovi sa I kolokvijuma.**

4) **Studenti koji polažu ispit integralno rade SVE ZADATKE (1-6) za vreme 3 h. Studentima koji nisu ništa napisali u gornjem levom uglu na koricama vežbanke ispit se pregleda kao integralni. Ukoliko je student radio integralni ispit, ne priznaje mu se parcijalno jedan deo!**

5) **Zadatak koji nije rađen ili čije rešenje ne treba bodovati jasno označiti na koricama sveske (u odgovarajućoj rubrici) oznakom X.**

6) Na koricama vežbanke (u gornjem desnom uglu) treba napisati broj poena sa prijemnog ispita iz fizike (ako je rađen 2024. godine), u formi PR-ISP = ... poena. Ako nije rađen, napisati PR-ISP = NE. Ako znate da ste imali poene iz fizike na prijemnom, ali niste sigurni tačno koliko, napisati PR-ISP = ?. Ukoliko student ne stavi nikakvu oznaku za prijemni ispit, poeni sa prijemnog ispita mu se neće uzeti u obzir pri formiranju ocene.

7) **Dozvoljena je upotreba neprogramibilnih kalkulatora i grafitne olovke minimalne tvrdoće B2.**

8) **List sa tekstom zadataka poneti sa sobom. Ne ostavljati ga u vežbanci.**

9) Ispit se može napustiti po isteku **najmanje jednog sata** od početka ispita.

10) **Kompletan odgovor na teorijsko pitanje podrazumeva prikaz relevantne/ih skice/a, izvođenja i ispisivanje pratećeg teksta. Vektori moraju biti jasno obeleženi tako da se razlikuju od skalara.**

11) **Ako student nastavlja izradu zadatka, neophodno je da na mestu prekida izrade zadatka jasno naznači da nastavak postoji. Ukoliko se više zadataka (ili delova) radi na istoj strani, neophodno je rastaviti ih horizontalnom linijom preko cele širine stranice. Ne preskakati listove u vežbanci. Ukoliko se ostave prazne stranice između zadataka, a ne popune se do predaje vežbanke, precrtati ih.**

Fizika 1, ETF, Beograd
Oktober 2 ispitni rok 2025. godine
Rešenja zadataka

1. Polazeći od izraza za tangencijalno ubrzanje i početnog uslova ($v(0) = 0$):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = p \Rightarrow v = pt = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \frac{pt^2}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{2s}{p}.$$

Iz izraza za normalno ubrzanje sledi

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{p^2 t^2}{R} = qt^4 \Rightarrow R = \frac{p^2}{qt^2} = \frac{p^3}{2qs}.$$

Intenzitet vektora ubrzanja je:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{p^2 + q^2 t^8} = \sqrt{p^2 + \left(\frac{4qs^2}{p^2}\right)^2}.$$

2. Pri penjanju uz strmu ravan blok se kreće usporeno, pri čemu je $|a^\uparrow| = g(\sin \beta + \mu \cos \beta)$, prelazeći put s do zaustavljanja, tako da je početna brzina $v_0^2 = 2|a^\uparrow|s$. Pri spuštanjem se kreće ubrzanjem $a^\downarrow = g(\sin \beta - \mu \cos \beta)$, dok je brzina pri prolasku kroz polazni položaj $v_0'^2 = 2a^\downarrow s$. Odnos brzina $\xi = v_0'/v_0 = 0,8$, pa je

$$\xi^2 = \left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 = \frac{2a^\downarrow s}{2|a^\uparrow|s} = \frac{\sin \beta - \mu \cos \beta}{\sin \beta + \mu \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \mu}{\operatorname{tg} \beta + \mu} \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \beta \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} = 0,127.$$

3. (a) Videti skripta i beleške sa predavanja 2024/25.

(b1) Za pravolinijsko kretanje duž x -ose, prema jednačini Meščerskog za $\vec{F}_{rez}^{(ext)} = 0$ i $\vec{v}_{gr} = -v_{gr}\vec{e}_x$:

$$m(t) \underbrace{\frac{dv}{dt}}_a = -v_{gr} \frac{dm}{dt}.$$

Ubrzanje rakete je

$$a = \frac{dv}{dt} = -v_{gr} \frac{dm}{m} = v_{gr} \frac{\left|\frac{dm}{dt}\right|}{m}.$$

Odavde

$$\left|\frac{dm}{dt}\right| (t=0) = \frac{am_0}{v_{gr}} = 1,12 \cdot 10^5 \text{ kg/s}.$$

(b2) Na osnovu

$$a = -v_{gr} \frac{dm}{m}$$

integracijom sledi:

$$m(t) = m_0 e^{-at/v_{gr}}.$$

Prema uslovu

$$\frac{at'}{v_{gr}} = 1$$

sledi

$$t' = \frac{v_{gr}}{a} = 250 \text{ s}.$$

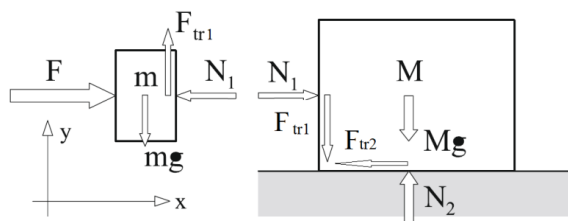
(b3) $m(\tau) = m_0 e^{-\frac{a\tau}{v_{gr}}} = 2,30433 \cdot 10^5 \text{ kg}.$

(b4) Brzina je

$$v = a\tau = v_{gr} \ln \frac{m_0}{m} = 12 \text{ km/s}.$$

4. (a) Videti skripta i beleške sa predavanja školske 2024/25.

(b) Sve sile koje deluju na delove sistema su prikazane na slici. Sistem se ne kreće, pa je za masu m jednačina ravnoteže sila po x i y -osi



$$\sum F_x = 0 = F - N_1, \quad (1a)$$

$$\sum F_y = 0 = F_{tr1} - mg. \quad (1b)$$

Iz (1a) je $F = N_1$, pa iz (1b) i uslova da telo ne kliza sledi $F_{tr1} = mg \leq \mu N_1 = \mu F$, odakle je:

$$F \geq \frac{mg}{\mu} = F_{\min} = \sqrt{5}mg = 21,94 \text{ N}. \quad (2)$$

Pošto sistem miruje, sledi za telo mase M

$$\sum F_x = 0 = N_1 - F_{tr2}, \quad (3a)$$

$$\sum F_y = 0 = N_2 - Mg - F_{tr1}, \quad (3b)$$

odakle je $F_{tr2} = N_1 = F$ i $N_2 = Mg + F_{tr1} = (m + M)g$, pa je uslov da M ne kliza:

$$F = F_{tr2} \leq \mu N_2 = \mu(m + M)g = F_{\max} = 11\mu mg = \frac{11}{\sqrt{5}}mg = 48,26 \text{ N}. \quad (4)$$

Traženi opseg inteziteta sile F je

$$21,94 \text{ N} \leq F \leq 48,26 \text{ N}. \quad (5)$$

5. (a) Videti skripta i beleške sa predavanja školske 2024/25.

(b) Opruga se nalazi u ravnotežnom položaju u istegnutom stanju kao na slici uz zadatak. Pri oscilovanju su sile koje deluju u koncu T_1 (na masu m sa leve strane koturače) i $T_2 = k(x + x_0)$ (pri istezanju opruge za udaljenost x od ravnotežnog položaja u kojem je opruga istegnuta za x_0) u koncu sa desne strane koturače. Jednačine kretanja za masu m (referentni sistem je u smeru težine mase m) i koturaču su

$$ma_x = mg - T_1 \quad (1)$$

$$I\alpha = (T_1 - T_2)R, \quad \alpha = a_x/R, \quad I = mR^2/2, \quad (2)$$

respektivno. U ravnotežnom stanju $T_1 = mg$, $T_2 = kx_0$ i $T_1 = T_2$, pa je $x_0 = mg/k$. Eliminacijom sile T_1 iz sistema (1) i (2) se dobija jednačina oscilovanja kao za LHO

$$a_x + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k / (m + M/2)},$$

odnosno, period oscilacija je

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{(m + M/2) / k}.$$

6. Opšti izraz za faznu brzinu je

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \beta k}.$$

Opšti izraz za grupnu brzinu je

$$v_g = \frac{1}{2} \frac{(g + 3\beta k^2)}{\sqrt{gk + \beta k^3}}.$$

(a) Za $\lambda \ll \sqrt{\beta/g}$, $k \gg \sqrt{g/\beta}$, fazna brzina je:

$$v_f = \sqrt{\beta k},$$

a disperziona relacija je

$$\omega = \sqrt{\beta k^3}.$$

Prema tome, grupna brzina je:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\beta k} = \frac{3}{2} v_f.$$

Odavde:

$$\frac{v_g}{v_f} = \frac{3}{2}.$$

(b) Za $\lambda \gg \sqrt{\beta/g}$, $k \ll \sqrt{g/\beta}$,

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Takođe

$$\omega = \sqrt{gk}.$$

Grupna brzina je

$$v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_f.$$

Dakle,

$$\frac{v_g}{v_f} = \frac{1}{2}.$$

(c) Koristeći opšte izraze za v_f i v_g , na osnovu uslova $v_f = v_g$ sledi:

$$k = \sqrt{g/\beta}.$$

Odavde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\beta}{g}} = 17 \text{ mm}.$$

Beograd, 26. 10. 2025.

Predmetni nastavnici