Физика

за софтверско инжењерство

Белешке са предавања 1

2. октобар 2019

Предавања/вежбе:

Проф. др Јасна Црњански (jafa@etf.rs, соба 8 лаб. павиљон)
Доц. др Марко Крстић (marko.krstic@etf.rs, соба 9 лаб. пав.)

http://nobel.etf.bg.ac.rs/studiranje/kursevi/si1f/

user: fizikasi   pass: dekart07

Организација курса / НОВА правила полагања испита:

На сајту предмета, опција: Преглед курса!!! Пажљиво проучити!

Литература:

П. Маринковић, П. Михаиловић, „Физика – збирка задатака са решењима за студенте софтверског инжењерства"

П. Маринковић, П. Михаиловић, Одабрана поглавља Физике: Оптика и Топлота, Академска мисао, 2017.

Белешке са предавања и вежби: НА НОБЕЛ САЈТУ, ЗАПОСЛЕНИ, ЈАСНА И МАРКО!!!

МЕХАНИКА → ПРОУЧАВА МЕХАНИЧКО КРЕТАЊЕ
(ПРЕМЕШТАЊЕ МИКРОЧЕСТИЦА ИЛИ МАКРОТЕЛА ЈЕДНОГ У ОДНОСУ НА ДРУГО)

↓ ОДВИЈА СЕ У

ГЕОМЕТРИЈА ← ПРОСТОРУ → простор је Еуклидов
+
И $\boxed{3D} \rightarrow \boxed{2D} \rightarrow \boxed{1D}$

ВРЕМЕ ← ВРЕМЕНУ → OXFORD DICTIONARY

=

„The indefinite continued progress of existence and events in the past, present and future, regarded as a whole."

КИНЕМАТИКА

ТРЕТИРА МЕХАНИЧКО КРЕТАЊЕ КАО ТАКВО И ДАТО БЕЗ ДА УЛАЗИ У УЗРОКЕ КРЕТАЊА

→ УНИВЕРЗАЛНИ ПАРАМЕТАР КОЈИ ТЕЧЕ СИМУЛТАНО У СВИМ СИСТЕМИМА РЕФЕРЕНЦИЈЕ

$t\,[s]$

$$\underbrace{\vec{F}}_{} = \underbrace{m \cdot \vec{a}}_{}$$

ЗАШТО СЕ ТЕЛО КРЕЋЕ?
ДИНАМИКА

КАКО СЕ ТЕЛО КРЕЋЕ?
КИНЕМАТИКА

→ Посматрамо кретање тела

→ модел крутог тела

Апроксимација

Има облик & димензије али се током кретања не деформише!
Наравно, у природи нема таквих тела

→ модел материјалне тачке

Ако су димензије тела занемарљиве у односу на димензије путање по којој се тело креће.

→ Да ли се тачка • M креће?
Неопходно је увести референтну тачку или референтни систем!!

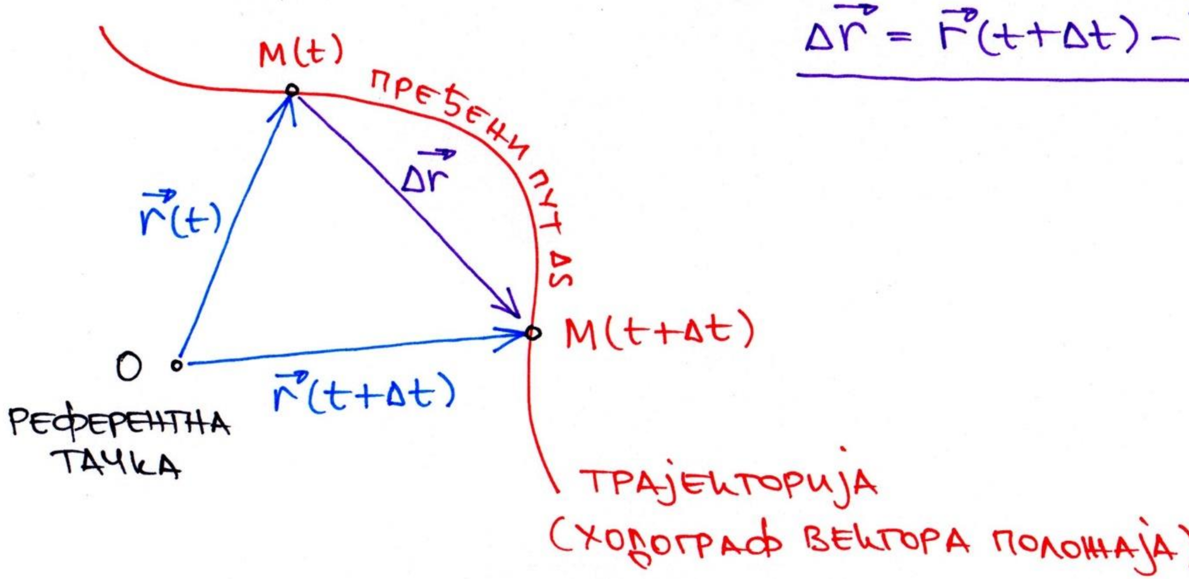
→ Описивање кретања
1. векторски
2. аналитички
3. природно

ВЕКТОРСКИ ПРИСТУП ОПИСИВАЊА КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ М

ВЕКТОР ПОЛОЖАЈА $\vec{r}(t)$

ВЕКТОР ПОМЕРАЈА ЗА Δt

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$



Д1 ВЕКТОРИ, ЊИХОВЕ ОСОБИНЕ И ОПЕРАЦИЈЕ СА ВЕКТОРИМА

☐ ВЕКТОР СРЕДЊЕ БРЗИНЕ

$$\boxed{\vec{v}_{SR} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

ПРАВАЦ & СМЕР ВЕКТОРА ПОМЕРАЈА

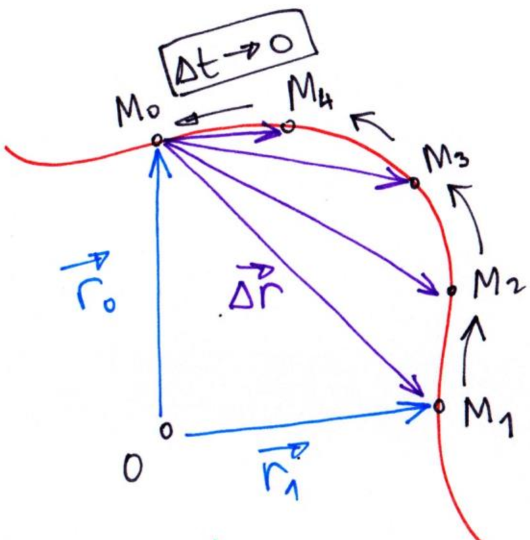
ИНТЕНЗИТЕТ : УКУПАН ПОМЕРАЈ У ВРЕМЕНУ Δt

→ СЛОЖЕНО КРЕТАЊЕ ПО КРИВОЛИНИЈСКОЈ ПУТАЊИ ТРЕТИРА СЕ КАО ПРАВОЛИНИЈСКО КРЕТАЊЕ ДУЖ ПРАВЦА $\Delta \vec{r}$

↓

сви детаљи кретања су изгубљени!!

☐ ВЕКТОР ТРЕНУТНЕ БРЗИНЕ



$\Delta t \to 0$: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |\Delta \vec{r}| = \Delta s$

☐ ПОМЕРАЈ → ПРЕЂЕНИ ПУТ !!

☐ ТЕТИВА → ТАНГЕНТА !!

☐ $$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \triangleq \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

→ ИНТЕНЗИТЕТ : $|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt}$

ПРАВАЦ : ТАНГЕНТА НА ТРАЈЕКТОРИЈУ

СМЕР : ВЕКТОР ПОМЕРАЈА

Д2 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН ☐

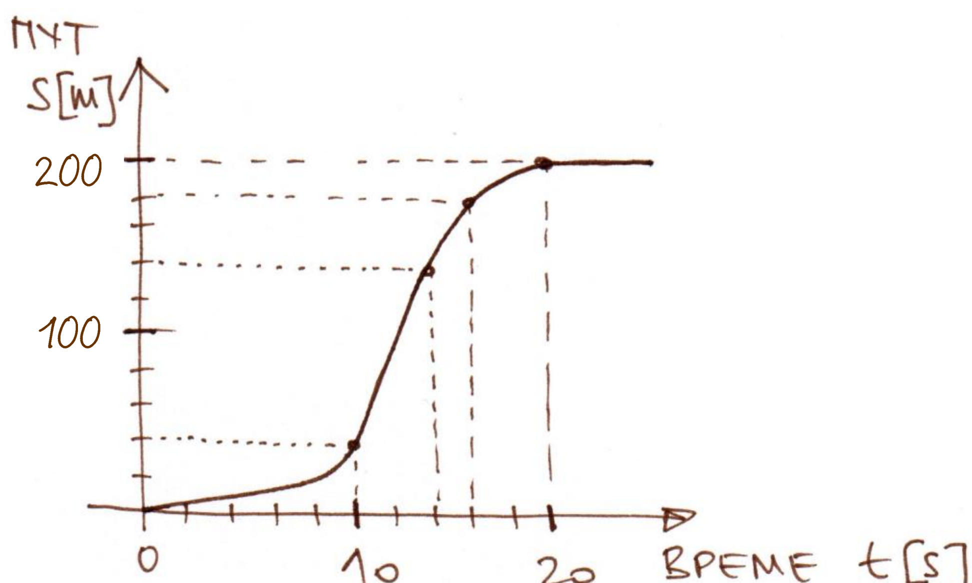
Пр.1 Тачка се креће праволинијски у једном смеру.

Анализом графика растојања које тачка пређе у функцији од времена, одредити:

а) средњу брзину на посматраном интервалу времена;

б) максималну брзину тачке ;

ц) тренутак t_0 у ком је тренутна брзина тачке једнака средњој брзини на интервалу времена од 0 до t_0.



→ КАКО СЕ МОЖЕ ОДРЕДИТИ РАСТОЈАЊЕ КОЈЕ ЈЕ ТАЧКА ПРЕШЛА (ПУТ) У ТОКУ НЕКОГ ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНА, АКО ЈЕ ПОЗНАТА ЊЕНА ТРЕНУТНА БРЗИНА?

ИНТЕНЗИТЕТ ТРЕНУТНЕ БРЗИНЕ $v = \frac{ds}{dt}$ ЗА КРАТАК ИНТЕРВАЛ $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

УКУПАН ВРЕМЕНСКИ ИНТЕРВАЛ СЕ МОЖЕ ПОДЕЛИТИ НА КРАТКЕ ИНТЕРВАЛЕ Δt

ЗА СВАКО Δt ТАЧКА ПРЕЂЕ НЕКО Δs

$$\Delta s_i = v_i \cdot \Delta t$$

→ СМАТРАМО ДА ЈЕ Δt ДОВОЉНО КРАТКО ДА ЈЕ БРЗИНА КОНСТАНТНА

УКУПАН ПРЕЂЕНИ ПУТ $S = \sum_i v_i \cdot \Delta t$ → $S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v_i \cdot \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t')\,dt'$

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} v(t')\cdot dt}$$

$\int$ ЈЕ СКРАЋЕНИЦА ОД summa АЛИ СЕ УОБИЧАЈЕНО ЗОВЕ „ИНТЕГРАЛ"

ДЗ ТАБЛИЧНИ ИНТЕГРАЛИ

☐ ВЕКТОР СРЕДЊЕ БРЗИНЕ $\vec{v}_{sr}$ ИЛИ $\langle \vec{v} \rangle$

$$\vec{v}_{sr} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t') \cdot dt'$$

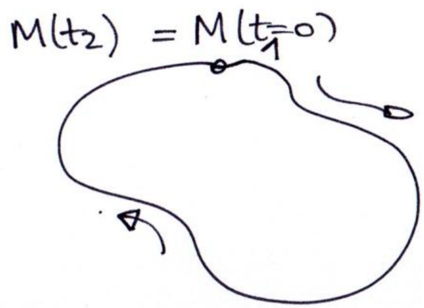
← У ПИТАЊУ ЈЕ ВЕКТОР !!

☐ СРЕДЊА ВРЕДНОСТ ИНТЕНЗИТЕТА БРЗИНЕ $\langle |\vec{v}| \rangle$

$$\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| \, dt'$$

← У ПИТАЊУ ЈЕ СКАЛАР

☐ $|\langle \vec{v} \rangle| \neq \langle |\vec{v}| \rangle$

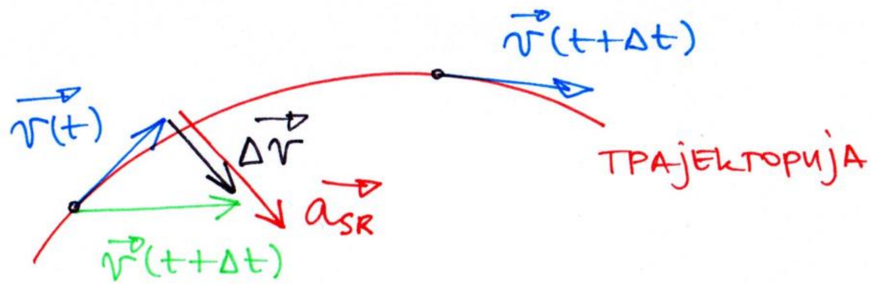


→ $|\langle \vec{v} \rangle| = 0$ ЈЕР ЈЕ ПОМЕРАЈ $\emptyset$

$\langle |\vec{v}| \rangle \neq 0$

ТАЧКА ОПИСУЈЕ ЗАТВОРЕНУ ПУТАЊУ.

☐ Вектор средњег убрзања $\vec{a}_{SR} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$



→ лежи у оскулаторној равни

→ усмерен ка унутраш. трајекторије (као $\Delta\vec{v}$)

→ тангенцијалан на ходограф брзине

"Оскулаторна раван"
(највећи контакт са трајекторијом)

☐ Тренутно убрзање

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}}$$

ДОГОВОР ОКО ОЗНАЧАВАЊА

→ ИЗВОД ПО ВРЕМЕНУ : ТАЧКИЦА

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi} \; ; \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \ddot{\xi} \; ;$$

НА ПРИМЕР : $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ И $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

→ ИЗВОД ПО КООРДИНАТИ : АПОСТРОФ

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi' \quad \text{А} \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = \xi''$$

ПРАВОЛИНИЈСКО КРЕТАЊЕ СА КОНСТАНТНИМ УБРЗАЊЕМ

→ НЕКА ЈЕ $a = C$:

$$x(t) = C_1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot t^2$$

$$v(t) = C_2 + 2C_3 \cdot t$$

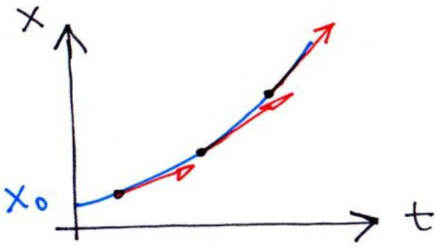
$$a(t) = 2C_3$$

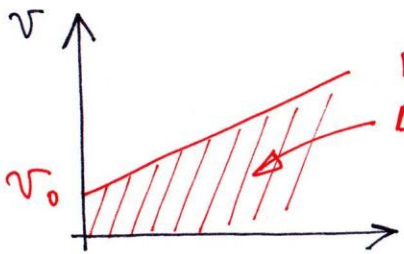
↓ СМИСАО УВЕДЕНИХ КОНСТАНТИ

$C_1 = x(t=0)$ ПОЧЕТНА ПОЗИЦИЈА

$C_2 = v(t=0)$ ПОЧЕТНА БРЗИНА

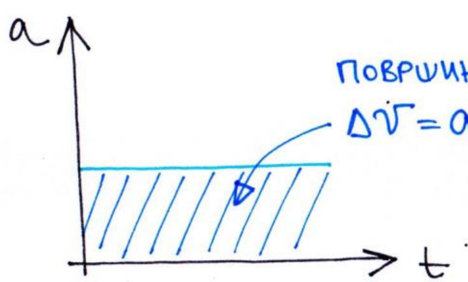
$C_3 = a/2$





ПОВРШИНА ИСПОД ГРАФ.

$\Delta S = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$



ПОВРШИНА ИСПОД ГРАФ.

$\Delta v = a \cdot \Delta t$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{x(t=0)}_{x_0} + \underbrace{v(t=0)}_{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}}$$

Δ4 ИЗВЕСТИ $v(x)$: $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a \cdot x}$ ☐

Δ5 MOVING MAN app ☐

Пр.2 Тачка се креће праволинијски по закону

$$x(t) = 8 - 6t + t^2$$

а) Ако је време дато у секундама, одредити димензије уз бројне вредности које фигуришу у изразу.

б) Скицирати $x(t)$ и на графику обележити вредности релевантних тачака.

ц) Описати кретање са становишта брзине и координате.

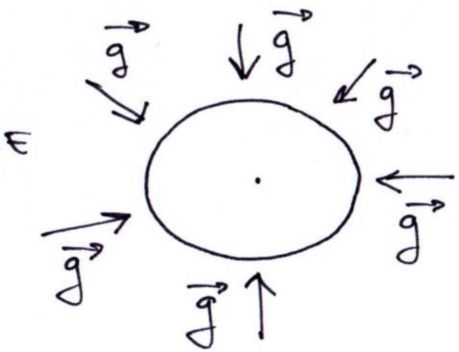
д) Написати изразе за брзину и убрзање у функцији од времена.

е) Да ли постоји тренутак када је тачка непокретна?

f) Како (и зашто) се брзина мења после почетног тренутка? Коментарисати смисао алгебарског знака брзине.

□ КРЕТАЊЕ ТЕЛА У ПОЉУ ГРАВИТАЦИЈЕ МОЖЕ СЕ ТРЕТИРАТИ КАО КРЕТАЊЕ СА КОНСТАНТНИМ УБРЗАЊЕМ

$$\boxed{a = g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \text{ ЗА ЗЕМЉУ}}$$



ПРАВАЦ : НОРМАЛАН НА ПОВРШИНУ ЗЕМЉЕ

СМЕР : КА ЦЕНТРУ ЗЕМЉЕ

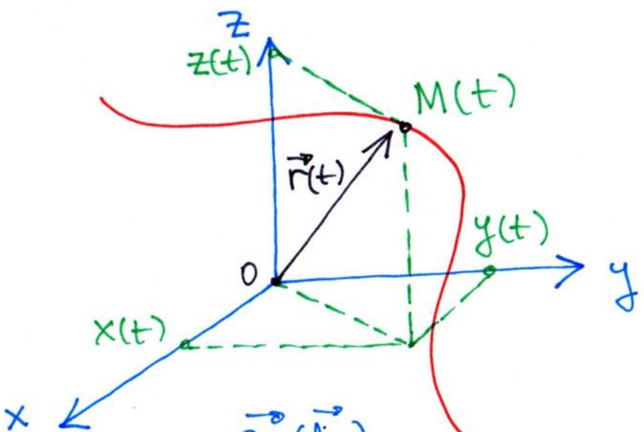
→ ЗА КРЕТАЊЕ У ВАКУУМУ

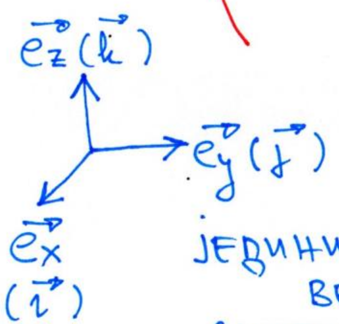
$$g \neq f(m, v, \text{ХЕМ. САСТАВА, ДИМЕНЗИЈА...})$$

АНАЛИТИЧКИ (КООРДИНАТНИ) ПРИСТУП ОПИСИВАЊА КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

→ 3D ПРОСТОР => 3 КООРДИНАТЕ КОЈЕ ЗАВИСЕ ОД ВРЕМЕНА (ПАРАМЕТАРСКЕ ИЛИ КИНЕМАТИЧКЕ ЈЕДНАЧ. КРЕТАЊА)

☐ ДЕКАРТОВ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ





ДЕСНИ

$\vec{e_x} \times \vec{e_y} = \vec{e_z}$

$\vec{e_y} \times \vec{e_z} = \vec{e_x}$

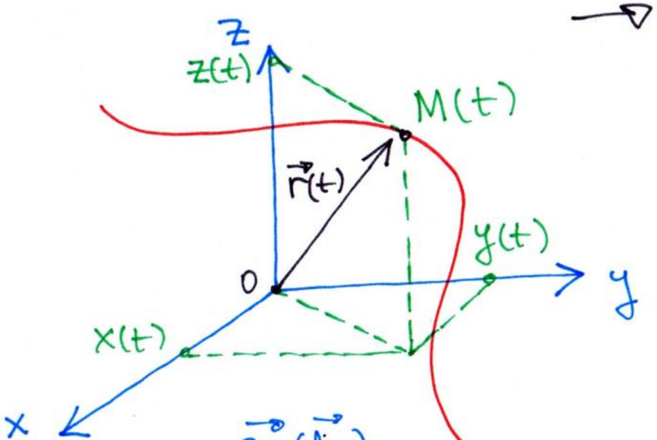
$\vec{e_z} \times \vec{e_x} = \vec{e_y}$

ЈЕДИНИЧНИ ("ОРТ") ВЕКТОРИ (ИНТЕНЗИТЕТ = 1, ПРАВАЦ + СМЕР ФИКСНИ)

АНАЛИТИЧКИ (КООРДИНАТНИ) ПРИСТУП ОПИСИВАЊА КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

→ 3D ПРОСТОР ⇒ 3 КООРДИНАТЕ КОЈЕ ЗАВИСЕ ОД ВРЕМЕНА (ПАРАМЕТАРСКЕ ИЛИ КИНЕМАТИЧКЕ ЈЕДНАЧ. КРЕТАЊА)

☐ ДЕКАРТОВ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ



→ ВЕКТОР ПОЛОЖАЈА

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\underbrace{x(t)}_{\text{координата; пројекција } M(t) \text{ на } x\text{-осу}}\vec{e}_x}_{\text{компонента } \vec{r} \text{ у } \vec{e}_x \text{ правцу}} + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

→ КОМПОНЕНТА $\vec{r}$ ~~НА~~ У $\vec{e}_x$ ПРАВЦУ

→ КООРДИНАТА; ПРОЈЕКЦИЈА $M(t)$ НА x-ОСУ

→ $x(t) \gtreqless 0$ ЗАВИСИ ОД ПОЛОЖ. РЕФ. ТАЧКЕ О

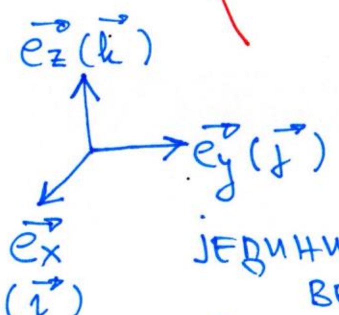
$$|\vec{r}(t)| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ДЕСНИ

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$

$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$



ЈЕДИНИЧНИ ("ОРТ") ВЕКТОРИ (ИНТЕНЗИТЕТ = 1, ПРАВАЦ & СМЕР ФИКСНИ)

→ ПАРАМЕТАРСКЕ Ј-НЕ КРЕТАЊА $x(t), y(t)$ И $z(t)$ СЕ ЈОШ НАЗИВАЈУ И Ј-НА ТРАЈЕКТОРИЈЕ У ПАРАМЕТАРСКОМ ОБЛИКУ

↓ ЕЛИМИНАЦИЈОМ ПАРАМЕТРА t

Ј-НА ТРАЈЕКТОРИЈЕ У КООРДИНАТНОМ ОБЛИКУ

ФИЗИЧКИ (РЕАЛНО ОСТВАРИВИ) ДЕЛОВИ ТРАЈЕКТОРИЈЕ ?

БРЗИНА У ДЕКАРТОВОМ СИСТЕМУ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} + z(t)\vec{e_z} \right)$$

$$\frac{d\vec{e_x}}{dt} = \frac{d\vec{e_y}}{dt} = \frac{d\vec{e_z}}{dt} = \phi$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} \\ \vec{v} &= \vec{v_x} + \vec{v_y} + \vec{v_z} \end{aligned}}$$

$\vec{v_x}$ компонента брзине у x-правцу

$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ пројекција брзине на x-осу

$v_x \gtreqless 0$ има алгебарски смисао !!

→ ИНТЕНЗИТЕТ БРЗИНЕ

$$\boxed{|\vec{v}| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

УБРЗАЊЕ У ДЕКАРТОВОМ СИСТЕМУ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e_x} + \frac{dv_y}{dt}\vec{e_y} + \frac{dv_z}{dt}\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} \\ a_y &= \ddot{y} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned}}$$

ПРОЈЕКЦИЈЕ УБРЗАЊА $\gtreqless 0$!!

$$\boxed{|\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

ИНТЕНЗИТЕТ УБРЗАЊА

Пр.3 Дат је вектор положаја материјалне тачке која се креће у равни:

$$\vec{r}(t) = At\vec{e}_x - 2Bt^2\vec{e}_y$$

где су A и B позитивне константе.

a) Одредити једначину трајекторије и скицирати је.

b) Одредити вектор брзине и интензитет брзине.

c) Одредити вектор средње брзине у интервалу времена од $[0, \tau]$.

d) Одредити вектор убрзања и интензитет убрзања.

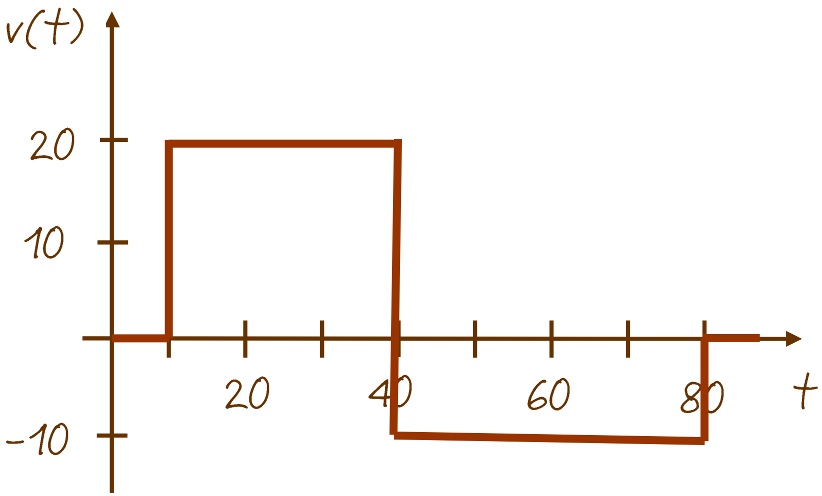
e) Одредити полупречник кривине трајекторије у тренутку $t = 0$.

Пр.4 Зависност алгебарске вредности интензитета брзине тачке у функцији од времена приказана је на графику. Одредити:

а) средњу вредност интензитета брзине

b) интензитет вектора средње брзине

у интервалу времена од 0 до 80 секунди.



☐ ДЕКАРТОВ СИСТЕМ : ВИЗУЕЛИЗАЦИЈА

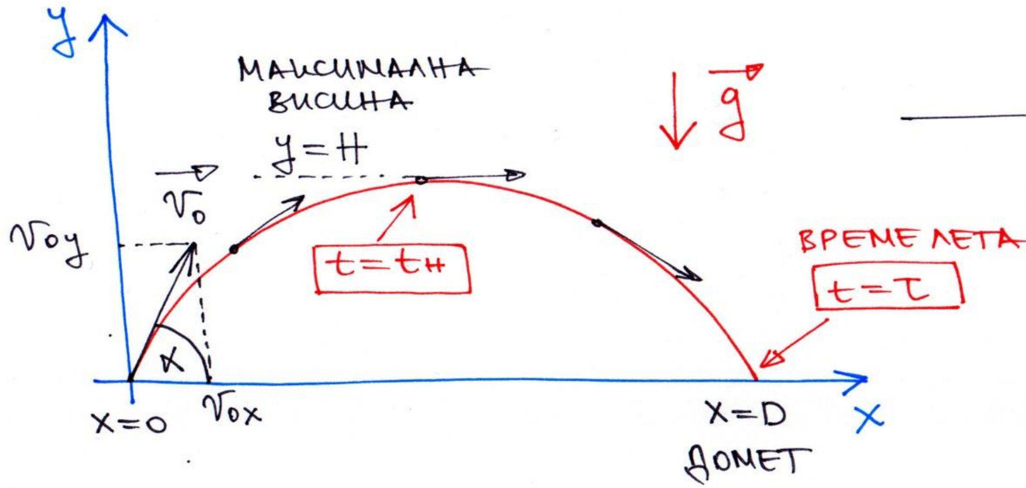
$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\boxed{\vec{r}(t)} \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift right, "d/dt"'] & \boxed{x(t),\ y(t)} \arrow[l, shift left] \arrow[r, "\text{ЕЛИМИНАЦ.}", "\text{ВРЕМЕНА}"'] \arrow[d, shift right, "d/dt"'] & \boxed{y(x)} \ \text{Ј-НА ТРАЈЕКТОРИЈЕ} \\
\boxed{\vec{v}(t)} \arrow[r, shift left] \arrow[u, shift right, "\int dt"'] \arrow[d, shift right, "d/dt"'] & \boxed{v_x = \dot{x},\ v_y = \dot{y}} \arrow[l, shift left] \arrow[r, "\text{ЕЛИМИНАЦ.}", "\text{ВРЕМЕНА}"'] \arrow[u, shift right, "\int dt"'] \arrow[d, shift right, "d/dt"'] & \boxed{v_y(v_x)} \\
\boxed{\vec{a}(t)} \arrow[r, shift left] \arrow[u, shift right, "\int dt"'] & \boxed{a_x = \dot{v}_x,\ a_y = \dot{v}_y} \arrow[l, shift left] \arrow[r, "\text{ЕЛИМИНАЦ.}", "\text{ВРЕМЕНА}"'] \arrow[u, shift right, "\int dt"'] & \boxed{a_y(a_x)}
\end{tikzcd}
$$

КРЕТАЊЕ ПРОЈЕКТИЛА
У ПОЉУ ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ → КОСИ ХИТАЦ

→ 2D ИНВЕРЗНИ ПРОБЛЕМ

ПОЗНАТО: 1. ПОЧЕТНА БРЗИНА $\vec{v}_0$
2. УГАО ИСПАЉИВАЊА (ЕЛЕВАЦИЈЕ) α
3. $g = 9{,}81\ m/s^2$ ↓

ЗА САДА: ОТПОР ВАЗДУХА ЗАНЕМАРЕН!



→
$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

КРЕТАЊЕ СА КОНСТАНТНИМ УБРЗАЊЕМ!!

ПАРАМЕТАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt}$$

$$dv_x = 0$$

$$\boxed{v_x = const = v_{0x} = v_0 \cos\alpha}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x=0}^{x(t)} dx = \int_{t=0}^{t} v_0 \cos\alpha \cdot dt'$$

$$\boxed{x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t}$$

$$a_y = -g = \frac{dv_y}{dt}$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = -\int_{t=0}^{t} g\, dt'$$

$$\boxed{v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \sin\alpha - gt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\int_{y=0}^{y(t)} dy = \int_{t=0}^{t} v_0 \sin\alpha \cdot dt' - \int_{t=0}^{t} g \cdot t' \cdot dt'$$

$$\boxed{y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}$$

→ У ЗАВИСНОСТИ ОД КОНКРЕТНОГ ПРОБЛЕМА ГРАНИЦЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ МОГУ ДА СЕ РАЗЛИКУЈУ.
ПАЗИТИ У ОДНОСУ НА СЛИКУ !

☐ ПУТАЊА ?

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \Rightarrow y(x) = \cancel{v_0} \sin\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{v_0}\cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

ПАРАБОЛА $\rightarrow$ $\boxed{y(x) = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot x^2}$

☐ МАКСИМАЛНА ВИСИНА

$$v_y(t=t_H) = 0 \rightarrow t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$\boxed{y(t=t_H) = H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$ А МОЖЕ И ИЗ $y'(x) = 0$

☐ ДОМЕТ

$$x(t=\tau) = D$$

$$y(t=\tau) = 0 \rightarrow \tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \rightarrow \boxed{D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

КАДА (ЗА КОЈЕ α) ЈЕ МАКСИМАЛАН ?

Пр.5 Тело је са површине Земље избачено под углом α почетном брзином v_0. Одредити:

a) једначину трајекторије

b) домет и максималну висину

c) максималну и минималну вредност полупречника кривине трајекторије