OO1LF – Uvodni čas – 2017/2018

Uvodne napomene

Kurs je praktično orijentisan, ali se oslanja i na teoriju. Predispitne obaveze se sastoje od 6 setova eksperimenata koji će biti urađeni u toku semestra i učestvuju sa maksimalno 40% poena u konačnoj oceni. Izrada i odbrana svih laboratorijskih vežbi je neophodna kao preduslov za izlazak na ispit! Preostali poeni se osvajaju ili putem dva kolokvijuma koji se sastoje od po 6 zadataka, nose po 30 poena i traju po 120 minuta, ili putem integralnog ispita koji se sastoji od 10 zadataka, nosi 60 poena i traje 180 minuta. Prvi kolokvijum održaće se polovinom semestra, u terminu koji će objaviti studentska služba, a u januarskom roku biće moguće polaganje isključivo drugog kolokvijuma. Počev od februarskog roka ispit se polaze isključivo integralno. Primeri kolokvijuma i ispita, kao i ostale relevantne informacije vezane za kurs, mogu se naći na stranici predmeta:

http://nobel.etf.rs/studiranje/kursevi/oo1lf

Eksperimente izvode studenti uz pomoć asistenata i laboranata, osim u slučaju eksperimenata koji su pokaznog tipa. Vežbe će se izvoditi u timovima od po 2 ili 3 studenta. Redni broj tima odgovara rednom broju vežbe koju treba pripremiti u prvoj nedelji. U slučaju da studentu ne odgovara termin, zamena će biti omogućena po principu 1-1 i to u sopstvenoj organizaciji o čemu predmetni nastavnik doc. dr Koviljka Stanković mora biti lično obaveštena u Sali 16 Zavoda za fiziku u sledećim terminima:

- utorak 03.10. u terminu od 12:00 do 14:00
- petak 06.10. u terminu od 12:00 do 14:00

Od trenutka kada se oforme grupe, promena termina i timova neće biti dozvoljena. Studenti koji su prvu godinu upisali pre školske 2017/2018, a nisu završili predispitne obaveze treba da se jave predmetnom nastavniku u gore navedenim terminima kako bi bili raspoređeni u grupu za laboratorijske vežbe.

Vežbe su podeljene u dva ciklusa koja traju po tri nastavne nedelje. Za prvi ciklus predviđene su nedelje 4–6. Nedelja 7 je rezervisana za odbranu i nadoknadu, koji eventualno mogu biti zakazani u nekom drugom terminu i/ili drugoj laboratoriji, različitim od redovnih. Za drugi ciklus su predviđene nedelje 8–10, dok je naredna nedelja ponovo predviđena za nadoknadu i odbranu. Nadoknada će biti omogućena isključivo onim studentima koji su opravdano propustili da urade najviše jednu vežbu po ciklusu. Za veći broj propuštenih vežbi, nadoknada neće biti omogućena. Kako vežbe nisu međusobno povezane, svaki tim će prve nedelje ciklusa raditi vežbu sa rednim brojem tima kom pripadaju, a zatim će nastaviti da rade vežbe ciklično.

	1. nedelja	2. nedelja	3. nedelja	4. nedelja	5. nedelja	6. nedelja
Tim 1	1	2	3	4	5	6
Tim 2	2	3	1	5	6	4
Tim 3	3	1	2	6	4	5

Neophodna literatura za ovaj predmet koja se može naći u skriptarnici u sobi 25 Zavoda za fiziku jeste:

- K. Stanković, D. Stanković, P. Osmokrović: „Laboratorijske vežbe iz fizike“, Zavod za fiziku tehničkih fakulteta, Beograd, 2014.

Pored toga, potrebno je da studenti pripreme milimetarski papir, na kome će crtati grafike koji se prilažu uz izveštaj, kao i jednu svesku A4 formata, poželjno na kvadratiće, koju na kraju kursa predaju predmetnom asistentu. Na naslovnoj strani te sveske treba napraviti tabelu sledeće forme:

Redni broj vežbe	Naslov vežbe	Datum izrade	Datum odbrane	Broj poena	Potpis asistenta
Vežba 1	"Merenje gustine..."				
Vežba 2					

Pre izrade vežbi potrebno je pripremiti odgovarajuće poglavlje iz knjige, kako bi studenti bili u mogućnosti da samostalno urade eksperiment. Priprema podrazumeva upoznavanje sa materijom i pripremu izveštaja u pisanoj formi (u svesci, svaka vežba sa početkom na novoj strani) koji treba da sadrži dva dela:

1. (*pre eksperimenta*) kratak teorijski uvod i opis fizičkih principa na kojima se eksperiment zasniva, uz skicu aparature i opis postupka merenja;
2. (*posle eksperimenta*) rezultate merenja u odgovarajućoj formi, obradu mernih rezultata i jasno uokviren konačni rezultat sa odgovarajućom mernom nesigurnošću.

Asistent zadržava pravo da studentima postavi kratka pitanja vezana za vežbu koju rade pre početka izrade same vežbe i u slučaju da student nije pripremljen, udalji studenta iz laboratorije. U slučaju da student kasni na laboratorijsku vežbu, asistent zadržava pravo da mu ne omogući izradu vežbe u tom terminu. Dolazak bez adekvatnog izveštaja na laboratorijsku vežbu povlači sa sobom udaljavanje studenta.

Nakon vežbe, studenti samostalno rade drugi deo izveštaja i pripremaju se za usmenu odbranu urađene vežbe. Usmena odbrana je predviđena nedelju dana nakon izrade vežbe i nosi najviše 10 poena po vežbi, od kojih se 5 dobija na izveštaju, a 5 na usmenoj odbrani. Svako kašnjenje sa odbranom povlači sa sobom –2 poena, dok svaka odbrana vežbe u onom terminu u kom je i rađena donosi +2 poena. Odluka o eventualnom odlaganju odbrane mora nedvosmisleno biti saopštena asistentu pre početka odgovaranja, u suprotnom neće biti uvažena. Pitanja koja će biti postavljena na odbrani, vezana su za teorijski osnov vežbe, postupak merenja, dobijene rezultate, dobijene merne nesigurnosti, način na koji su izračunate i sl.

Izrada i odbrana svih vežbi je obavezna i predstavlja preduslov za izlazak na ispit!

Raspored vežbi po ciklusima:

<u>I Ciklus</u> (4, 5 i 6 nedelja semestra)

1. Merenje gustine tečnih i čvrstih supstanci (poglavlje 9)
2. Merenje modula elastičnosti žice (Jungov moduo) i merenje modula torzije (smicanja) žice. Merenje momenta inercije tela pomoću torzionog klatna (poglavlja 11, 12 i 13)
3. Merenje ubrzanja Zemljine teže pomoću klatna (poglavlje 10)

<u>II Ciklus</u> (8, 9 i 10 nedelja semestra)

4. Merenje odnosa specifičnih toplota c_p/c_v za vazduh metodom Klemen-Dezormea. Merenje brzine zvuka pomoću Kuntove cevi (poglavlja 14, 15 i 16)
5. Merenje specifične toplote čvrstih tela (poglavlja 17 i 18)
6. Merenje toplote isparavanja vode. Određivanje zavisnosti tačke ključanja vode od pritiska (poglavlja 17, 19 i 20)

Napomena: Merenje brzine zvuka pomoću Kuntove cevi i Određivanje zavisnosti tačke ključanja vode od pritiska izvode se pokazno, ali se brane kao i sve ostale vežbe.

Očekuje se da studenti tokom izrade bilo koje vežbe budu pripremljeni da odgovaraju na pitanja iz prvih pet poglavlja. Pored toga, studenti su u obavezi da se samostalno upoznaju sa sledećim temama:

- Osnovne jedinice SI sistema (poglavlje 4)
- Mehanička merila dužine; Merila mase – vage (poglavlja 7 i 8)
- Osnovni principi merenja pritiska (poglavlje 14)
- Osnovi termometrije (poglavlje 17)

Česte greške koje treba izbeći, kao i uputstva za prikaz rezultata merenja dati su u odvojenom prilogu.

Uvod u merenje

Merenje je opšteprisutno i svakodnevni život ne bi bilo moguće zamisliti bez njega.

Metrologija kao grana nauke podrazumeva:

- opis metoda merenja fizičkih veličina,
- razvoj i izradu mernih uređaja,
- reprodukciju mernih jedinica,
- prikupljanje i obradu podataka merenja,
- procenu nesigurnosti dobijenih mernih rezultata.

Merenje predstavlja upoređivanje neke fizičke veličine X sa drugom, istorodnom veličinom $[X]$ koja je usvojena za jedinicu mere, odnosno za referentnu vrednost te veličine, u potrazi za njihovim kvantitativnim odnosom. Pokazuje se da je skup od 7 fizičkih veličina dovoljan za opis svih ostalih fizičkih veličina. Ovaj skup čine osnovne fizičke veličine, sa pripadajućim osnovnim fizičkim jedinicama, a zajedno sadržanim u SI sistemu. Sve ostale jedinice nazivaju se izvedenim.

Tabela 1: Osnovne jedinice SI sistema

dužina	metar	m
masa	kilogram	kg
vreme	sekunda	s
jačina struje	amper	A
temperatura	kelvin/stepen celzijusa	K/°C
količina supstancije	mol	mol
svetlosna jačina	kandela	cd

Kao primer izvedene veličine može se posmatrati $[\mathrm{Pa}]$, odnosno paskal.

$$[\mathrm{Pa}] = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{m}]^2} = \frac{1}{[\mathrm{m}]^2}[\mathrm{kg}]\frac{[\mathrm{m}]}{[\mathrm{s}]^2} = \frac{[\mathrm{kg}]}{[\mathrm{m}][\mathrm{s}]^2}$$

Višestruka merenja neke veličine obično daju različite rezultate, bilo da se koriste različita merila, ili jedno isto. Stoga se javlja potreba za statističkom obradom rezultata i ispitivanjem njihove verodostojnosti, što predstavlja srž teorije grešaka. Sve do kraja 20. veka, teorija grešaka, iako dobro razvijena, nije bila dobro i jedinstveno primenjivana. Problem je rešen kada je 1993. doneto *Uputstvo za određivanje nesigurnosti u merenjima*. Međutim, naučni rad u metrologiji se ovde ne završava. Dalja istraživanja se klasifikuju u dva pravca:

1. istraživanje metoda za poboljšavanje tačnosti ostvarivanja osnovnih jedinica SI sistema i tačnije poznavanje fundamentalnih konstanti (preciznost je prioritet)
2. razvoj mernih tehnika i usavršavanje senzora namenjenih za industrijsku i masovnu primenu (odnos cena/kvalitet je prioritet)

Statistička obrada mernih podataka

Ponavljanjem merenja povećava se tačnost rezultata, ali se zahteva i adekvatna statistička obrada dobijenih vrednosti. Na ovaj način se dolazi do dva bitna podatka: srednje vrednosti i odstupanja od nje. Pokazuje se da ukoliko skup merenih vrednosti prikažemo na grafiku u formi neke funkcije raspodele, možemo sa visokom sigurnošću proceniti opseg u kom se merena veličina nalazi. Na osnovu funkcije raspodele moguće je doći do dva važna podatka:

- verovatnoće sa kojom će se neka vrednost javiti pri merenju,
- procenta rezultata merenja koji se naći u unapred zadatom intervalu vrednosti.

Po pravilu, funkcija raspodele je preciznija ako je broj merenja veći.

Ukoliko izvršimo niz merenja neke iste veličine, recimo mase nekog predmeta, merilom vrlo visoke rezolucije, po pravilu ćemo dobiti niz različitih vrednosti. Ovakva odstupanja mogu poticati od raznih uticaja okoline: prašine, vibracija, šumova, EM polja i slično. Ovako dobijeni rezultati nakon N merenja

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_i, \dots, x_{N-1}, x_N$$

nazivaju se **populacija**. Slično, ukoliko jednim visoko preciznim merilom merimo više predmeta koji su proizvedeni na identičan način (i stoga se očekuje da imaju i iste osobine), dobićemo vrednosti koje se među sobom razlikuju i predstavljaju populaciju.

Srednja vrednost populacije (μ) dobija se kao aritmetička sredina rezultata merenja

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Kada imamo ovako dobijenu srednju vrednost, možemo izračunati **odstupanje** (a_i) svakog pojedinačnog merenja od srednje vrednosti

$$a_i = x_i - \mu$$

Po pravilu, broj odstupanja sa pozitivnim znakom približno je jednak broju odstupanja sa negativnim znakom. Uzimajući u obzir definiciju srednje vrednosti i odstupanja od nje, suma svih odstupanja mora iznositi nula, što se matematički može prikazati kao

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu) = \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} \mu = \sum_{i=1}^{N} x_i - \mu\sum_{i=1}^{N} 1 = \sum_{i=1}^{N} x_i - N\mu = 0$$

U zavisnosti od korišćenih instrumenata, same merene veličine i uslova pri kojima je merenje izvršeno, odstupanje može varirati od nekoliko procenata (ili više) do ispod 1% za jako kvalitetne merne uređaje.

Za izražavanje odstupanja, koristi se jedna veličina koja u sebi objedinjuje sva pojedinačna odstupanja i naziva se **standardno odstupanje populacije** (σ). Pošto odstupanje može biti i pozitivno i negativno, da se te vrednosti ne bi međusobno poništile, posmatra se njihov kvadrat, pa važi

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

gde se σ^2 naziva varijansom ili disperzijom. Pored standardnog odstupanja, definiše se i **relativno standardno odstupanje**, koje kvantitativno opisuje ponovljivost merenja

$$\sigma_r = \sigma/\mu$$

Pojam populacije vezuje se za teorijski beskonačan set vrednosti. Kako u realnosti ovo nije moguće postići, posmatra se ograničeni skup od n merenja

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n$$

koji predstavljaju **uzorak**. Svaki uzorak je podskup odgovarajuće populacije. Osnovni cilj statističke obrade podataka jeste da se na osnovu uzorka dobije što bolja procena srednje vrednosti μ i standardnog odstupanja σ. Najboljom aproksimacijom srednje vrednosti populacije smatra se **srednja vrednost uzorka**

$$x_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pokazuje se da za ovako odabranu srednju vrednost, suma kvadrata odstupanja ima minimalnu vrednost, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_s - x_i)^2 = min.$$

Standardno odstupanje uzorka (s) računa se slično kao standardno odstupanje populacije (σ), uz promenu N u $n-1$ i kao takvo predstavlja najbolju aproksimaciju σ

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_s)^2}$$

Pošto uzorak predstavlja skup nasumično selektovanih vrednosti iz cele populacije, i njegova srednja vrednost nije srednja vrednost populacije, već ima neko odstupanje. **Standardno odstupanje srednje vrednosti uzorka** dato je kao

$$s_{x_s}^2 = \frac{1}{n} s^2 \quad \Rightarrow \quad s_{x_s} = \frac{1}{\sqrt{n}} s = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_s)^2}$$

Pošto je standardno odstupanje srednje vrednosti $\sqrt{n}$ puta manje od standardnog odstupanja pojedinačnih merenja, ponavljanje postupka merenja je opravdano u cilju pronalaženja najbolje aproksimacije srednje vrednosti populacije.

Kao krajnji rezultat merenja može se uzeti srednja vrednost uzorka x_s. Ukoliko je moguće doći do **uslovno tačne vrednosti** x_t, dobijene na osnovu etalonskog instrumenta, **odstupanje merenja** (ε) iznosi

$$\varepsilon = x_s - x_t$$

Relativno odstupanje merenja se definiše kao

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_t} = \frac{x_s - x_t}{x_t}$$

Tačnost merenja predstavlja bliskost slaganja rezultata merenja i uslovno tačne, tj. prave vrednosti merene veličine. Dakle, tačnost je bolja ako su x_s i x_t bliži, odnosno ε_r manje. Potrebno je obratiti pažnju na dve stvari:

1. Tačnost je opisni, tj. kvalitativni pojam.
2. Treba izbegavati korišćenje termina preciznost umesto tačnost!

Ponovljivost se odnosi na seriju merenja koja su izvršena pod istim uslovima. To podrazumeva istovetnost mernog postupka, posmatrača, merila, kao i to da je ponavljanje izvršeno u kratkom vremenskom roku. Može se povezati sa **relativnim standardnim odstupanjem**

$$s_r = \frac{s}{x_s}$$

i bolja je ukoliko je s_r manje.

Konačno, **reproduktivnost** je takođe izražena relativnim standardnim odstupanjem, ali ovog puta u slučaju ponovljenih merenja u promenljivim uslovima. To podrazumeva promenu mernih instrumenata, postupak merenja, mesta merenja, kao i to da je ponavljanje izvršeno u dužem vremenskom roku.

Funkcija raspodele

Eksperimentalno iskustvo pokazuje da se pri ponavljanju nekog merenja rezultati na određeni način grupišu oko srednje vrednosti. Rezultate možemo predstaviti grafički tako što x-osu proglasimo osom veličine koja je merena i opseg joj ograničimo na minimalnu x_{min} i maksimalnu x_{max} izmerenu vrednost. Zatim se opseg podeli na m segmenata iste dužine $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/m$, gde je $m \approx \sqrt{n}$, pri čemu je n broj merenja. Sa druge strane, na y-osu unosi se relativna učestanost pojavljivanja rezultata $p_i = P_i/\Delta x = n_i/(n\Delta x)$. Unošenje relativne umesto apsolutne učestanosti omogućava da se segmentacija x-ose izvrši proizvoljno, a da ovako dobijena grafička predstava rezultata i dalje zadrži originalni smisao. Drugim rečima, x-osu podelimo na (jednake) segmente, a svakom segmentu dodelimo visinu koja odgovara relativnom broju merenja za koje je dobijeno x iz tog segmenta.

Na primer, ukoliko je uzorak nekog merenja dat kao {6.5, 3, 4.1, 6.4, 7.4, 5.2, 6, 4.8, 9}, možemo nacrtati stepenastu funkciju koja se naziva **histogram**. Kako broj merenja u uzorku raste, tako raste i broj segmenata na istom intervalu x-ose, te se segmenti duž x-ose sužavaju, sve dok iz male promene Δx ne pređemo u infinitezimalnu promenu (diferencijal) dx. Tako iz diskretne (stepenaste) raspodele, prelazimo u kontinualnu (glatku) raspodelu, koja se najčešće može matematički opisati analitičkom funkcijom. Takav matematički opis daje **funkciju raspodele**.

Pošto površina ispod krive, odnosno integral funkcije raspodele predstavlja **verovatnoću**, funkcija će biti normirana tako da verovatnoća bude 1. Verovatnoća 1 znači da pri merenju moramo dobiti vrednost između $-\infty$ i $+\infty$. Ako funkciju verovatnoće označimo sa $p(x)$, a ukupnu verovatnoću sa P, dobija se

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

Verovatnoća da se x nalazi u nekom unapred zadatom intervalu računa se kao

$$P_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx \leq 1$$

Srednja vrednost i standardno odstupanje dobijaju se kao

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x)dx$$

Neke od važnijih funkcija raspodela su:

1. Gausova (normalna) raspodela:

$$p_G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Koristi se pri opisu rezultata merenja praćenih slučajnim greškama. Simetrična je oko srednje vrednosti. Pri izračunavanju verovatnoće, nailazi se na integral koji nije analitički rešiv i čija se rešenja daju tablično. Primer upotrebe ove funkcije može se naći na stranici sa statistikom prijemnog ispita.

Ukoliko posmatramo verovatnoću nalaženja x u opsegu ($\mu \pm \sigma$)

$$P(\mu \pm \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p_G(x)dx = 2\int_{\mu}^{\mu+\sigma} p_G(x)dx = 0.683$$

To znači da je verovatnoća nalaženja x u datom opsegu 68.3%, tj. da je **statistička sigurnost** nalaženja rezultata u ovom opsegu 68.3%. Za interval ($\mu \pm 2\sigma$) ona iznosi 95.4%, a za ($\mu \pm 3\sigma$) 99.7%. Za sigurnost od 99% posmatra se interval ($\mu \pm 2.576\sigma$).

Uvođenjem smene $z = (x-\mu)/\sigma$, koja je bezdimenziona veličina, dolazi se do **Gausove standardizovane (uopštene) raspodele**

$$p_{GU}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$$

2. Uniformna (ravnomerna) raspodela

$$p_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Koristi se za opis merenja gde je bilo koja vrednost u određenom opsegu podjednako verovatna:

- U slučaju nedovoljno informacija o mernom instrumentu (nesigurnost manja od 1.5%, kada je poluširina jednaka 0.015*centralna vrednost)
- pri očitavanju sa skale nekog mernog uređaja (za poluširinu intervala se u tom slučaju uzima polovina podeoka)

Standardno odstupanje iznosi

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p_U(x) dx} = \sqrt{\frac{1}{2a}\int_{\mu-a}^{\mu+a} (x-\mu)^2 d(x-\mu)} = \sqrt{\frac{1}{2a}\frac{(x-\mu)^3}{3}\Big|_{\mu-a}^{\mu+a}} = \sqrt{\frac{1}{2a}\frac{2a^3}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Verovatnoća nalaženja rezultata u intervalu $(\mu \pm \sigma)$ iznosi

$$P\left(\mu \pm \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\mu-\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\mu+\frac{a}{\sqrt{3}}} p_U(x) dx = 2\int_{\mu}^{\mu+\frac{a}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

Potrebno je strogo voditi računa o granicama integrala prilikom proračuna verovatnoće sa funkcijama koje su nulte na nekom opsegu. Recimo, neka je od interesa naći verovatnoću nalaženja rezultata u intervalu $(\mu \pm 2\sigma)$. Česta greška je data u nastavku

$$P\left(\mu \pm 2\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\mu-2\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\mu+2\frac{a}{\sqrt{3}}} p_U(x) dx = 2\int_{\mu}^{\mu+2\frac{a}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2a} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155 > 1 \text{ !!!}$$

Budući da je vrednost verovatnoće veća od 1, tokom prethodnog proračuna je sigurno načinjena **greška**. Ona se sastoji u postavljanju gornje granice drugog integrala van domena na kom je funkcija raspodele nenulta. Ispravni postupak glasi

$$P\left(\mu \pm 2\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\mu-2\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\mu+2\frac{a}{\sqrt{3}}} p_U(x) dx = 2\int_{\mu}^{\mu+a} \frac{1}{2a} dx = 1$$

3. Trougaona raspodela

$$p_T(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{x-x_1}{a^2} & x_1 \le x < \mu \\ \frac{x_2-x}{a^2} & \mu \le x \le x_2 \\ 0 & x > x_2 \end{cases}$$

gde je $x_1 = \mu - a$, a $x_2 = \mu + a$. Trougaona raspodela je simetrično raspoređena oko centralne vrednosti. Koristi se u posebnim slučajevima kada se iz iskustva zna da postoji određeno grupisanje rezultata oko centralne vrednosti, ali raspodela najverovatnije nije Gausova.

Standardno odstupanje iznosi

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p_T(x) dx} = \sqrt{\int_{\mu-a}^{\mu} \frac{x-(\mu-a)}{a^2}(x-\mu)^2 d(x-\mu) + \int_{\mu}^{\mu+a} \frac{\mu+a-x}{a^2}(x-\mu)^2 d(x-\mu)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{a^2}\int_{\mu-a}^{\mu}(x-\mu+a)(x-\mu)^2 d(x-\mu)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{a^2}}\sqrt{\int_{\mu-a}^{\mu}(x-\mu)^3 d(x-\mu) + a\int_{\mu-a}^{\mu}(x-\mu)^2 d(x-\mu)} = \sqrt{\frac{2}{a^2}}\sqrt{-\frac{(-a)^4}{4} - a\frac{(-a)^3}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Verovatnoća nalaženja rezultata u intervalu $(\mu \pm \sigma)$ iznosi

$$P\left(\mu \pm \frac{a}{\sqrt{6}}\right) = \int_{\mu-\frac{a}{\sqrt{6}}}^{\mu+\frac{a}{\sqrt{6}}} p_T(x)dx = 2\int_{\mu}^{\mu+\frac{a}{\sqrt{6}}}\frac{\mu+a-x}{a^2}dx = \frac{2}{a^2}\left[(\mu+a)\frac{a}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}\left(\mu+\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}\right]$$

$$P\left(\mu \pm \frac{a}{\sqrt{6}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{12}\right) = 0.65$$

Indirektno merene veličine

Kada neku veličinu nije moguće direktno meriti, pristupa se kombinaciji eksperimentalnih rezultata onih veličina koje je moguće meriti, i teorijskih saznanja o veličini koju želimo **indirektno** da merimo. Ako takvu veličinu y predstavimo pomoću prethodno izmerenih veličina $x_1, \dots, x_n$, dobija se

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

Standardno odstupanje direktno merenih veličina se izračunava pomoću već navedenih formula, a zatim se pristupa izračunavanju standardnog odstupanja indirektno merene veličine kao

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 s_{x_i}^2\right]}$$

gde je **parcijalni izvod** definisan kao izvod po zadatoj promenljivoj pri čemu se smatra da su sve ostale promenljive konstantne. Prethodni izraz dobijen je uz pomoć totalnog diferencijala i njegove zamene mernim nesigurnostima, ali uz zanemarivanje mešovitih članova usled nepostojanja korelacije.

Primer: Indirektno određivanje gustine homogene kugle $\rho = m/V = m/(4R^3\pi/3)$, gde je moguće meriti masu i poluprečnik.

Izražavanje merne nesigurnosti

Analiza merne nesigurnosti zasniva se na matematičkoj teoriji grešaka. Pod **greškom** se podrazumeva razlika dobijenog rezultata i tačne vrednosti. Teorija prepoznaje slučajne i sistematske greške. Dok **slučajne** imaju nasumični karakter, **sistematske** u teoriji izazivaju promenu uvek iste veličine i istog znaka. U praksi, ova dva tipa grešaka nije moguće razdvojiti. Nasuprot teoriji grešaka, analiza **merne nesigurnosti** može biti primenjena u praksi.

Statističkom obradom rezultata merenja dobijaju se tri bitne vrednosti:

1. merni rezultat
2. merna nesigurnost
3. funkcija raspodele i statistička sigurnost sa kojom važe dobijeni rezultati.

Standardna merna nesigurnost u, po definiciji jednaka je standardnom odstupanju $u = s$. Odavde se zaključuje da njena statistička sigurnost zavisi od funkcije raspodele verovatnoće pripisane nekom merenju.

Proširena merna nesigurnost U predstavlja proizvod standardne merne nesigurnosti u i koeficijenta proširenja k, tj. $U = ku$. Koeficijent proširenja uzima vrednosti od $\sqrt{3}$ do 3, u zavisnosti od raspodele i zahtevane tačnosti. Na ovaj način se uniformiše rezultat i daje sa sigurnošću koja ne zavisi od funkcije raspodele. Najčešće je ta sigurnost 95% i merni rezultat se nalazi u intervalu $x_s \pm U$. Pregled vrednosti k za neke od bitnijih slučajeva sigurnosti i raspodela može se naći u knjizi u tabeli na strani 24.

Postoje dva osnovna tipa merne nesigurnosti: Tip A i Tip B koji zavise od metoda korišćenog pri merenju. Na osnovu njih se može dobiti i kombinovana merna nesigurnost.

Merna nesigurnost **Tipa A** se isključivo dobija kao posledica **statističke obrade podataka** dobijenih tokom merenja. Ovo znači da merenje mora biti ponovljeno više puta i predstavljeno uzorkom $x_1, \ldots, x_n$, odakle se može izračunati srednja vrednost x_s. Kako ova nesigurnost opisuje odstupanje srednje vrednosti, dato je kao

$$u_A = s_{x_s} = \frac{1}{\sqrt{n}} s = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_s)^2}$$

i njoj se dodeljuje normalna raspodela.

Merna nesigurnost **Tipa B** određuje se **svim ostalim metodama**, izuzev statističke analize. Ona se može odrediti i kod pojedinačnog merenja, kada merna nesigurnost Tipa A ne postoji. Oslanja se na teorijska znanja i uticaj okruženja na merni proces (specifikacija instrumenta, rezolucija instrumenta, dinamički efekti i sl.). Najčešće joj se pridružuje uniformna raspodela. Ukoliko je minimalni podeok na mernom uređaju označen sa d, onda je njegova poluširina uniformne raspodele $a = d/2$, te se merna nesigurnost Tipa B računa kao $u_B = d/(2\sqrt{3})$, budući da je proširena merna nesigurnost uniformne raspodele jednaka njenoj poluširini.

Kombinovana merna nesigurnost postoji:

1. kod merenja u kojima se javljaju obe merne nesigurnosti: i tipa A i tipa B.
2. kod indirektnih merenja, čak i kada ne postoji MN tipa A.

Ukoliko se pretpostavi da direktno merene veličine ne utiču jedna na drugu i da je merenje urađeno samo jedanput, kombinovana merna nesigurnost glasi

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2 \right]}$$

Kada postoje oba tipa merne nesigurnosti

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Metoda najmanjih kvadrata i optimalna prava

Prilikom merenja, često je potrebno grafički prikazati zavisnost promene izlazne veličine x_i u odnosu na varijaciju ulazne veličine x_u. Ukoliko je na osnovu teorije poznato da su dve posmatrane veličine linearno proporcionalne, ili je njihovu zavisnost moguće linearizovati, ili se pak na osnovu mernih rezultata "posumnja" na linearnu zavisnost, potrebno je što preciznije odrediti koeficijent nagiba prave, a, i slobodni član, b. Proračun se tipično sprovodi analitički, nakon čega sledi grafički prikaz zavisnosti. U praksi se događa da parovi ulazne i izlazne veličine više odstupaju od prave (nelinearnost raste) kako se ulazna veličina povećava.

Rezultati ponovljenih merenja će odstupati od teorijskog predviđanja, te se mora postaviti kriterijum po kom će se odrediti **optimalna prava** sa minimalnom greškom. Ovaj kriterijum je predstavljen **metodom najmanjeg zbira kvadrata odstupanja**, što predstavlja posledicu pridruživanja Gausove raspodele ulaznoj i izlaznoj veličini, usled njihove statističke obrade. Budući da je prava jedinstveno definisana pomoću dve tačke, o statističkoj obradi podataka može se govoriti tek kada je dostupno tri ili više tačaka.

Pre određivanja optimalne prave, $x_i = ax_u + b$, potrebno je ustanoviti koja se od dve veličine (ulazna x_u ili izlazna x_i) meri sa većom relativnom nesigurnošću. U slučaju da je to izlazna veličina $\boldsymbol{x_i}$, posmatra se suma kvadrata odstupanja tačaka od prave predstavljena **vertikalnim** rastojanjem (razlikom izmerene i proračunate vrednosti izlazne veličine).

Prava će biti optimalna onda kada suma kvadrata odstupanja bude imala najmanju moguću vrednost

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_{ik} - (ax_{uk} + b)]^2 = min$$

Uslov je ispunjen onda kada su parcijalni izvodi po a i po b jednaki nuli. Parcijalni izvod po a daje

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk} - b)^2 = 2 \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk} - b)(-x_{uk}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-x_{ik}x_{uk} + ax_{uk}^2 + bx_{uk}\right) = -\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk} + a\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_{uk} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk} = a\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_{uk}$$

Parcijalni izvod po b daje

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk} - b)^2 = -2 \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk} - b) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk} - b) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} - a\sum_{k=1}^{n} x_{uk} - b\sum_{k=1}^{n} 1 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = a\sum_{k=1}^{n} x_{uk} + bn \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} - a\sum_{k=1}^{n} x_{uk}\right)$$

Odakle sledi

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk} = a\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} - a\sum_{k=1}^{n} x_{uk}\right)\sum_{k=1}^{n} x_{uk}$$

$$n\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk} = an\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 - a\sum_{k=1}^{n} x_{uk}\sum_{k=1}^{n} x_{uk} + \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\sum_{k=1}^{n} x_{uk}$$

Konačno, koeficijent pravca i slobodni član glase

$$\boxed{\begin{gathered} a = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\sum_{k=1}^{n} x_{uk}}{n\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{uk}\right)^2} \\ b = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2\sum_{k=1}^{n} x_{ik} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk}\sum_{k=1}^{n} x_{uk}}{n\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{uk}\right)^2} \end{gathered}}$$

Na osnovu izraza dobijenog izjednačavanjem parcijalnog izvoda po b nulom, može se zaključiti

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = a\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{uk} + b \quad \Rightarrow \quad x_{is} = ax_{us} + b$$

Optimalna prava prolazi kroz tačku definisanu srednjim vrednostima izlazne i ulazne promenljive, (x_{us}, x_{is}), koja se naziva i **težištem** posmatranih n tačaka. **Nelinearnost** karakteristike može se odrediti kao količnik maksimalnog odstupanja i maksimalne promene izlazne veličine

$$\frac{\varepsilon_{max}}{x_{in} - x_{i1}} 100\% = \frac{\max\{x_{ik} - (ax_{uk} + b)\}}{a(x_{un} - x_{u1})} 100\%$$

Standardno odstupanje izlazne veličine dobija se kao

$$s_{xi} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}[x_{ik} - (ax_{uk} + b)]^2}{n_{sl}}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}[x_{ik} - (ax_{uk} + b)]^2}{n - 2}}$$

gde je $n_{sl} = n - 2$, broj stepeni slobode, umanjen za 2 od ukupnog broja parova tačaka usled postojanja dva parametra, a i b, koja definišu pravu. **Standardna odstupanja** koeficijenta pravca i slobodnog člana data su pomoću

$$s_a = s_{xi}\sqrt{\frac{n}{\Delta}}\,, \qquad s_b = s_{xi}\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2}{\Delta}}\,, \qquad \Delta = n\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_{uk}\right)^2$$

Kada je merna nesigurnost ulazne veličine $\boldsymbol{x_u}$ veća, sumiraju se kvadrati **horizontalnih** rastojanja i jednačina prave glasi

$$x_u = \frac{x_i}{a} - \frac{b}{a} = a_1 x_i + b_1$$

Koeficijenti i njihova standardna odstupanja dobijaju se iz prethodnih jednačina zamenom a sa $a_1 = 1/a$ i b sa $b_1 = -b/a$.

Ukoliko teorija predviđa da prava prolazi kroz koordinatni početak, slobodni član b treba da bude jednak nuli. U praksi je gotovo nemoguće statističkom obradom dobiti $\boldsymbol{b = 0}$, te se taj uslov postavlja pri minimiziranju odstupanja

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk})^2 = min$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk})^2 = 2\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - ax_{uk})(-x_{uk}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk} - a\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{uk}}{\sum_{k=1}^{n} x_{uk}^2}$$

Konačno, još jedan značajan parametar koji govori o tome u kakvom odnosu stoje dve veličine x i y je **koeficijent korelacije** r, koji može imati vrednosti $-1 \leq r \leq 1$, a računa se kao

$$r = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Primenjeno na slučaj određivanja optimalne prave, kovarijansa C_{xy} određuje se pomoću

$$C_{x_u x_i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_{uk} - x_{us})(x_{ik} - x_{is})$$

Varijanse su date standardnim odstupanjima

$$\sigma_{x_u} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{uk} - x_{us})^2}\ , \qquad \sigma_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - x_{is})^2}$$

Konačno, koeficijent korelacije postaje

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{uk} - x_{us})(x_{ik} - x_{is})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{uk} - x_{us})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - x_{is})^2}} = \frac{n\sum_{k=1}^{n}x_{ik}x_{uk} - \sum_{k=1}^{n}x_{ik}\sum_{k=1}^{n}x_{uk}}{\sqrt{n\sum_{k=1}^{n}x_{uk}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n}x_{uk}\right)^2}\sqrt{n\sum_{k=1}^{n}x_{ik}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\right)^2}}$$

Za prave sa pozitivnim nagibom, $r > 0$, u suprotnom, za negativne nagibe, $r < 0$. Što je r po apsolutnoj vrednosti bliže 1, to je korelacija čvršća, a tačke malo odstupaju od optimalne prave. Odstupanje raste kako r po apsolutnoj vrednosti opada i teži nuli.

Metoda optimalne prave (minimuma zbira kvadrata odstupanja) može se uspešno primeniti i u slučajevima kada je zavisnost izlazne veličine od ulazne nelinearna sprovođenjem postupka **linearizacije**. Za zadatu zavisnost $x_i = f(x_u)$, pronalaze se dve funkcije, f_1 i f_2, čijom se primenom na izlaznu i ulaznu veličinu dobijaju nove veličine koje su linearno zavisne

$$x_i^* = ax_u^* + b\ , \qquad x_i^* = f_1(x_i)\ , \qquad x_u^* = f_2(x_u)$$

Zaokruživanje brojeva i ispisivanje rezultata

Pri ispisu rezultata, mora se voditi računa o broju značajnih cifara na koje se zaokružuju merna nesigurnost i merni rezultat. Nakon završenih proračuna, najpre se pristupa zaokruživanju **proširene kombinovane** merne nesigurnosti, U_c, i to tako da dobijena vrednost ima samo jednu ili dve cifre različite od 0, odnosno jednu ili dve značajne cifre. Nakon toga se rezultat x_s zaokružuje na isto decimalno mesto na koju je zaokružena merna nesigurnost.

Pravilno **zaokruživanje proširene merne nesigurnosti**:

1. ukoliko postoji samo jedna cifra različita od 0, proširena merna nesigurnost se ostavlja u tom obliku;
2. ukoliko postoji više od jedne značajne cifre:
   a. ako je $U_c < 10$, zaokruživanje se vrši na **jednu** značajnu cifru;
   b. ako je $10 \leq U_c < 100$, zaokruživanje se vrši na **dve** značajne cifre;
   c. ako je $U_c \geq 100$, merna nesigurnost se predstavlja u obliku $(U_c \cdot 10^{-3}) \cdot 10^3 = U_c' \cdot 10^3$, gde je $U_c' = U_c \cdot 10^{-3}$. U zavisnosti od opsega u kom se nalazi U_c', primenjuje se jedno od prethodno izlistanih pravila 2.a, 2.b ili 2.c;
   d. od prethodnih pravila (2.a do 2.c) se odstupa isključivo ako je eksplicitno naveden broj značajnih cifara na koje je potrebno zaokružiti mernu nesigurnost;
3. ukoliko je prva cifra ostatka koji se odbacuje veća od 5 ili jednaka 5, a nakon nje postoji najmanje jedna nenulta cifra, poslednja cifra koja se zadržava uvećava se za jedan;
4. ukoliko je prva cifra ostatka koji se odbacuje jednaka 5, a nakon nje ne postoji ni jedna nenulta cifra, poslednja cifra koja se zadržava uvećava se za jedan ako je neparna, a ostaje nepromenjena ako je parna;
5. ukoliko je prva cifra ostatka koji se odbacuje manja od 5, prilikom zaokruživanja proširene merne nesigurnosti primenjuje se **pravilo 5%** koje kaže da se poslednja značajna cifra ostavlja istom ako je odbačeni deo prilikom zaokruživanja manji od 5% rezultata. U suprotnom, poslednja značajna cifra uvećava se za 1.

Primer 1: Neka je proširena merna nesigurnost data kao $U_c = m_2m_1.d_1d_2d_3$, gde su m_i i d_i značajne cifre, pri čemu je $m_2 \neq 0$ i $d_3 \neq 0$. Prema pravilu 2.b, broj značajnih cifara u zaokruženoj vrednosti U_c biće **2**. Deo koji se odbacuje je $0.d_1d_2d_3$. Ako je $d_1 < 5$, prema pravilu 5%:

- ako je $0.d_1d_2d_3 > 0.05U_c$ sledi $U_c = m_2m_1'$, gde je $m_1' = m_1 + 1$
- ako je $0.d_1d_2d_3 < 0.05U_c$ sledi $U_c = m_2m_1$

Ako je $d_1 \geq 5$, imajući u vidu da je $d_3 \neq 0$, sledi $U_c = m_2m_1'$, gde je $m_1' = m_1 + 1$.

Primer 2: Neka je proširena merna nesigurnost data kao $U_c = 0.d_1d_2d_3$, gde su d_i značajne cifre, pri čemu je $d_3 \neq 0$. Prema pravilu 2.a, broj značajnih cifara u zaokruženoj vrednosti U_c biće **1**. Deo koji se odbacuje je $0.0d_2d_3$. Ako je $d_2 < 5$, prema pravilu 5%:

- ako je $0.0d_2d_3 > 0.05U_c$ sledi $U_c = 0.d_1'$, gde je $d_1' = d_1 + 1$
- ako je $0.0d_2d_3 < 0.05U_c$ sledi $U_c = 0.d_1$

Ako je $d_2 \geq 5$, imajući u vidu da je $d_3 \neq 0$, sledi $U_c = 0.d_1'$, gde je $d_1' = d_1 + 1$.

Nakon zaokruživanja proširene merne nesigurnosti, pristupa se zaokruživanju srednje vrednosti rezultata i to tako da se zaokruživanje vrši na decimalno mesto koje odgovara mestu najmanje značajne cifre zaokružene proširene merne nesigurnosti, vodeći računa da su i srednja vrednost i proširena merna nesigurnost istog reda veličine (recimo, oba u metrima, nikako srednja vrednost u metrima, a proširena merna nesigurnost u centimetrima).

Pravilno zaokruživanje **mernog rezultata** na k decimala:

1. ukoliko iza k-te decimale ne postoji ni jedna cifra različita od 0, rezultat ostaje u istom obliku;
2. ukoliko se iza k-te decimale nalazi cifra **manja** od 5, cifra na k-toj decimali se ne menja;
3. ukoliko se iza k-te decimale nalazi cifra **veća** od 5, cifra na k-toj decimali se uvećava za 1;
4. u koliko se iza k-te decimale nalazi cifra 5:
    a. ako iza cifre 5 na $(k+1)$-om mestu ne postoji ni jedna cifra različita od 0, cifra na k-tom mestu ostaje nepromenjena ako je parna, a uvećava se za 1 ako je neparna;
    b. ako se iza cifre 5 na proizvoljnom mestu nalazi bilo koja cifra različita od 0, cifra na k-tom mestu se uvećava za 1.

Primer 3: Zaokružiti sledeće rezultate i odgovarajuće proširene merne nesigurnosti:

m = 526.13 kg;	U_m = 0.51 kg:	m = (526.1 ± 0.5) kg
m = 520 kg;	U_m = 0.02 kg:	m = (520.00 ± 0.02) kg
m = 300.055 kg;	U_m = 0.042 kg:	m = (300.06 ± 0.04) kg
m = 17.64 kg;	U_m = 0.33 kg:	m = (17.6 ± 0.4) kg
m = 526.5 kg;	U_m = 0.99 kg:	m = (526 ± 1) kg
m = 742.1163 kg;	U_m = 15.106 kg:	m = (742 ± 15) kg

Zadaci

1. Iskazati najbolju procenu tačne vrednosti mernih rezultata prikazanih u tabeli.

	Rezultat merenja x	Proširena kombinovana merna nesigurnost U_c	Broj značajnih cifara nesigurnosti U_c	Najbolja procena tačne vrednosti ($x \pm U_c$) [ ]
[1]	374,313 V	29,374 V	1	(370 ± 30) V
[1]	1,451 A	78,25 mA	1	(1,45 ± 0,08) A
[1]	$2{,}258 \cdot 10^3$ kJ/kg	24,1 kJ/kg	1	$(2{,}26 \pm 0{,}03) \cdot 10^3$ kJ/kg
[1]	8,1450 m	7,91 cm	1	(8,14 ± 0,08) m
[1]	9,561 kΩ	972 Ω	1	(10 ± 1) kΩ
[1]	4,381 kg	0,321 kg	1	(4,4 ±0,4) kg

---

2. Brojne vrednosti prikazane u tabeli u decimalnom zapisu izraziti u naučnoj notaciji na zadati broj *n* značajnih cifara.

	Decimalni zapis	Broj značajnih cifara *n*	Naučna notacija
[1]	23781	3	$2{,}38 \cdot 10^4$
[1]	0,0842	2	$8{,}4 \cdot 10^{-2}$
[1]	0,000057035	4	$5{,}704 \cdot 10^{-5}$
[1]	7340528	1	$7 \cdot 10^6$
[1]	-375,48	2	$-3{,}8 \cdot 10^2$
[1]	4500	3	$4{,}50 \cdot 10^3$

---

3. Normalni napon σ koji deluje na žicu kružnog poprečnog preseka određuje se na bazi merenja mase m kojom se žica opterećuje i prečnika žice d. Nesigurnost merenja mase je u_m, a nesigurnost merenja prečnika žice je u_d. Izvesti izraz za relativnu standardnu kombinovanu mernu nesigurnost merenja normalnog napona u_σ/σ. Smatrati da su merenja mase i prečnika žice međusobno nekorelisane veličine i da merenja nisu ponavljana. Gravitaciono ubrzanje g je konstanta.

[1] $\sigma = \dfrac{4mg}{\pi d^2}$	[1] $\dfrac{\partial \sigma}{\partial m} = \dfrac{4g}{\pi d^2}$	[1] $\dfrac{\partial \sigma}{\partial d} = -\dfrac{8mg}{\pi d^3}$
[2] $u_\sigma = \dfrac{4mg}{\pi d^2}\sqrt{\left(\dfrac{u_m}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{2u_d}{d}\right)^2}$	[1] $u_\sigma/\sigma = \sqrt{\left(\dfrac{u_m}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{2u_d}{d}\right)^2}$	

---

4. Posmatraju se funkcije gustine uniformne i trougaone raspodele, $p_U(x)$ i $p_T(x)$, sa istom srednjom vrednošću μ i istom poluširinom raspodele a. Koliku vrednost imaju funkcije p_U i p_T u srednjoj vrednosti μ? Koliku vrednost imaju koeficijenti proširenja k_U i k_T na nivou statističke sigurnosti od 100%? Kolika je verovatnoća da se x nalazi u intervalu $[\mu \pm a/2]$ u slučaju uniformne raspodele (P_U), a kolika je u slučaju trougaone raspodele (P_T)?

[1] $p_U(\mu) = \dfrac{1}{2a}$	[1] $p_T(\mu) = \dfrac{1}{a}$	[1] $k_U = \sqrt{3}$	[1] $k_T = \sqrt{6}$	[1] P_U (%) = 50 %	[1] P_T (%) = 75 %

---

5. Pri merenju otpornosti instrumentom rezolucije 1 Ω dobijen je uzorak prikazan u tabeli.

Redni broj merenja n	1	2	3	4	5
Otpornost R [Ω]	101	97	99	103	100

Izračunati:

a) srednju vrednost uzorka x_s i standardno odstupanje uzorka s,

b) standardnu mernu nesigurnost tip A u_A i standardnu mernu nesigurnost tip B u_B (usvojiti uniformnu raspodelu),

c) standardnu kombinovanu mernu nesigurnost u_C i

d) proširenu mernu nesigurnost U_c (usvojiti Gausovu raspodelu na 95% intervalu statističke sigurnosti). Proširenu mernu nesigurnost U_c zaokružiti na jednu značajnu cifru.

e) Iskazati najbolju procenu tačne vrednosti ($x_s \pm U_c$).

[0,5] $x_s = 100$ Ω	[0,5] $s = \sqrt{5}$ Ω	[0,5] $u_A = 1$ Ω	[0,5] $u_B = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ Ω	[1] $u_C = \sqrt{\dfrac{13}{12}}$ Ω	[1] $U_c = 2$ Ω
			[1] ($x_s \pm U_c$) [ ] = (100 ± 2) Ω		

---

6. Na uzorku od 36 mernih rezultata merenja mase instrumentom rezolucije 2 g izražena je najbolja procena tačne vrednosti mase koja iznosi (20 ± 2) g. Za proširenu kombinovanu mernu nesigurnost usvojena je Gausova raspodela na intervalu statističke sigurnosti od 99,7%. Koliko iznose:

a) standardna kombinovana merna nesigurnost u_C, standardna merna nesigurnost tip B u_B (za u_B usvojiti uniformnu raspodelu) i standardna merna nesigurnost tip A u_A,

b) standardno odstupanje srednje vrednosti s_{x_s}, standardno odstupanje uzorka s i srednja vrednost rezultata merenja x_s.

[1] $u_C = \dfrac{2}{3}$ g	[1] $u_B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ g	[1] $u_A = \dfrac{1}{3}$ g	[1] $s_{x_s} = \dfrac{1}{3}$ g	[1] $s = 2$ g	[1] $x_s = 20$ g

---